

Braun.

E 1357 E

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Unter Mitarbeit von

H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner
E. Kramar, A. Mehliß, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann
M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, R. Theile, F. Tank, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von

KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung:

J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma

Geschäftsführende Redaktion:

F. Rühmann

BAND 14

AUGUST 1960

HEFT 8

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

KWR

KABELWERK RHEYDT AKT.-GES.

RHEYDT (RHLd.)

INHALT

Originalmitteilungen:

	Seite
Die Darstellung von kopplungsfreien Abzweigschaltungen am Analogrechner	327
Von W. Schüssler	
Die Matrix eines Kettenleiters aus gleichen Vierpolen (Darstellung der beliebigen Potenz einer Matrix)	335
Von G. Doetsch	
Aktive Hochfrequenzspektrometer für ionosphärische Echolotung — I. Direktregistrierung ionosphärischer Charakteristiken	341
Von K. Bibl	
Erhöhung des Verstärkungsgrades eines breitbandigen Kettenverstärkers durch Kompensation seiner Nullstellen und durch Anordnung der restlichen Pole auf einer Tschebyscheffschen Ellipse	348
Von J. Koch	
Piezoelektrische Erregung von dickenschwingenden Quarz- oszillatoren mittels eines Parallelfeldes	361
Von R. Bechmann	
Buchbesprechungen	365

Einführung

in die Siebschaltungstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik

Von Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. Richard Feldtkeller

Direktor des Instituts für Nachrichtentechnik an der
Technischen Hochschule Stuttgart

Vierte, neubearbeitete Auflage

XI, 200 Seiten, 191 Bilder, 16 cm × 23 cm,
Ganzleinen DM 25,40

AUS DEM INHALT:

Einleitung

- I. Spulen, Kondensatoren, Schwingungskreise
 - II. Zweipole als Siebschaltungen
 - III. Die Grund-Siebketten
 - IV. Siebketten mit Grundgliedern und M-Gliedern
 - V. Bandpaß-Siebketten mit Hauptgliedern und Nebengliedern
 - VI. Einfluß der Verluste
- Anhänge

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART



TELEFUNKEN

Germanium-Dioden

- OA 150** Universaldiode für mittlere Sperrspannung und mittleren Flußstrom
- OA 154 Q** Diodenquartett für Ringmodulatoren und Gleichrichter in Graetz-Schaltung
- OA 159** Bei 39 MHz dynamisch geprüfte Diode, Regelspannungserzeuger in Fernsehgeräten
- OA 160** Bei 39 MHz dynamisch geprüfte Diode, Demodulator in Fernsehgeräten
- OA 161** Spezialdiode für hohe Sperrspannung mit großem Sperrwiderstand
- OA 172** Diodenpaar mit kleiner dynamischer Kapazität für Diskriminator- und Radiodetektorschaltungen
- OA 174** Universaldiode für mittlere Sperrspannung und mittleren Flußstrom
- OA 180** Goldrahtdiode mit besonders kleinem Durchlaßwiderstand, Schaltodiode
- OA 182** Goldrahtdiode mit kleinem Durchlaß- und großem Sperrwiderstand
- OA 182 B** Dioden-Quartett in Brückenschaltung für Meßgleichrichter
- OA 186** Diode für Einsatz in elektronischen Rechenmaschinen
- AAZ 10** Germanium-Spitzendiode in Kleinstausführung für die Verwendung in Rechenmaschinen
- AAZ 14** Dioden-Quartett im Gießharzgehäuse für die Verwendung als Ringmodulator mit guter Trägerunterdrückung (> 6 N)

Entwicklungsstellen der Industrie
erhalten auf Anforderung
Druckschriften über unsere Erzeugnisse
mit genauen technischen Daten.

TELEFUNKEN
ROHREN-VERTRIEB
ULM-DONAU

ARCHIV

DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG(A.E.Ü.)

Unter Mitarbeit von H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner, E. Kramar, A. Mehliß, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann, M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, F. Tank, R. Theile, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung: J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma / Geschäftsführende Redaktion: F. Rühmann
S. HIRZEL VERLAG, Stuttgart

Band 14

August 1960

Heft 8

Die Darstellung von kopplungsfreien Abzweigschaltungen am Analogrechner

Von WILHELM SCHÜSSLER

Mitteilung aus dem Institut für Elektrische Nachrichtentechnik der Technischen Hochschule Aachen

(A.E.Ü. 14 [1960], 327 – 334 eingegangen am 29. April 1960)

DK 621.372.4/.5:681.14.001.57

Durch geeigneten Ansatz des eine Abzweigschaltung beschreibenden Gleichungssystems ist es möglich, eine kopplungsfreie Abzweigschaltung mit bestimmten Zweipolen im Längs- und Quersystem bausteinartig dem Schaltbild entsprechend am Analogrechner nachzubilden. Dabei läßt sich die Größe jedes Schaltelementes durch jeweils ein einziges Potentiometer unabhängig von allen übrigen einstellen. Der Einfluß der Größe der einzelnen Bauelemente kann dadurch sehr leicht untersucht werden. Da an der Schaltung sowohl das Frequenz- als auch das Zeitverhalten an allen interessierenden Punkten, ebenso wie bei einer aus realen Bauelementen aufgebauten Schaltung, direkt gemessen werden können, läßt sich das Verfahren z. B. für Optimierungsaufgaben sehr gut verwenden.

By a suitable statement of the equation system describing a branching circuit it is possible to simulate on the analog computer a coupling-free branching circuit with certain two-terminal networks in the series and shunt arms in the way of building blocks corresponding to the circuit diagram. The value of each component can here be set with a single potentiometer with full independence of all others. The influence of the magnitudes of the individual circuit components can therefore be checked with great ease. Since direct measurements can be made on the circuit both of the frequency and the time behavior at all points of interest, in the same way as on a circuit constructed from real components, the method can be used with great success for problems of optimization, for instance.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1] war gezeigt worden, wie die durch ihre Pol- und Nullstellenlage gekennzeichnete Übertragungsfunktion eines linearen Systems am Analogrechner geschaltet werden kann. Durch rückwirkungsfreie Hintereinanderschaltung weniger bausteinartiger Grundsaltungen, die Polen bzw. Polstellenpaaren zugeordnet waren und damit Teilübertragungsfunktionen entsprachen, konnte jede Übertragungsfunktion gewonnen werden. Die so aufgebaute Schaltung kann durch einfache Verschiebung der Pole und Nullstellen für bestimmte Anwendungsfälle optimal gemacht werden. Für die Synthese der letztlich interessierenden Schaltung ist eine besondere, meist langwierige Rechnung erforderlich. Umgekehrt muß bei einer vorgegebenen Schaltung in ebenfalls manchmal umfangreicher Rechnung die dazugehörige Übertragungsfunktion mit ihren Pol- und Nullstellen ermittelt werden, wenn die Eigenschaften der Schaltung auf dem Analogrechner nach dem eben erwähnten Verfahren untersucht werden sollen. Es entstand so der Wunsch nach einem Verfahren, mit dessen Hilfe die insbesondere für Filter gebräuchlichste Schal-

tung, die Abzweigschaltung, unmittelbar untersucht werden kann.

Über die Darstellung allgemeiner Netzwerke am Analogrechner sind in der Literatur eine Reihe von Arbeiten erschienen ([2]—[8]). Neben den Zusammenhängen zwischen dem das Netzwerk beschreibenden System von Differentialgleichungen und der Schaltung am Analogrechner wird dort z. B. die Frage behandelt, wie bei der Aufstellung des Gleichungssystems Maschen und Knoten gewählt werden müssen, damit die Zahl der Integratoren nicht größer als die Zahl der Energiespeicher im Netzwerk ist [7], [8].

Zusätzliche Integratoren bedeuten nicht nur eine Vergrößerung des Aufwandes, sondern ergeben wegen der nicht zu vermeidenden praktischen Ungenauigkeiten der Rechenschaltung zusätzliche Polstellen der Übertragungsfunktion. Dadurch kann die Rechenschaltung instabil werden [3], [5], [6]. Diese Schwierigkeiten lassen sich allerdings mit Zusatzpotentiometern, die zur Korrektur eingeschaltet werden, verringern.

In der vorliegenden Arbeit wird für den Fall einer Abzweigschaltung ebenso wie in [1] ein Aufbau aus

bausteinartigen Grundsaltungen angestrebt, die jeweils bestimmten Teilen der Abzweigschaltung entsprechen und deren Zusammenschaltung der Gesamtanordnung entspricht. Dabei soll möglichst die Größe jedes Schaltelementes mit jeweils einem Potentiometer des Analogrechners eingestellt werden, damit eine einfache Zuordnung erreicht wird. Eine von LARROWE angegebene Methode zur unmittelbaren Darstellung von Netzwerken am Analogrechner führt für einfache Abzweigschaltungen mit jeweils einem Grundelement R oder L oder C im Längs- und Quersweig zu ähnlichen Ergebnissen [4]. Die Schaltung wird hier aus den Maschengleichungen für allgemeine Fälle abgeleitet und entspricht auch in ihrer Anordnung dem ursprünglichen Bild der Abzweigschaltung.

2. Die allgemeine Kettenschaltung

2.1. Analyse der allgemeinen Kettenschaltung

Bild 1 zeigt die allgemeine Kettenschaltung, betrieben aus einer Quelle mit dem (im allgemeinen komplexen) Innenwiderstand Z_1 und der Leerlaufspannung U_q , die mit dem Widerstand Z_a abgeschlossen ist.

Die Numerierung der Quer- und Längswiderstände bzw. -leitwerte erfolgte fortlaufend, beginnend am Ort des ersten Querleitwertes. Sie endet am Ort des letzten Querleitwertes mit dem Index n . Entsprechend der Zahl der Quer- und Längszweige sei die Schaltung als Abzweigschaltung n -ter Ordnung bezeichnet. Sonderfälle der Ordnung $n-1$ ergeben sich, wenn Y_1 oder $Y_n = 0$ ist; beim Sonderfall der Ordnung $n-2$ ist $Y_1 = Y_n = 0$. Die Schaltung wird mit der Maschenanalyse untersucht. Bei dieser Analyse werden bekanntlich im Gesamtkomplex durch Einzeichnen des sogenannten „vollständigen Baumes“ die „unabhängigen Zweige“ festgelegt, deren Ströme den Gesamtzustand des Netzwerkes festlegen und daher für die Kenntnis des Verhaltens errechnet werden müssen. Um zu gleichartigen Grundsaltungen zu kommen, wählt man zweckmäßig den vollständigen Baum so wie in Bild 2 für die Masche ν und ihre Umgebung angedeutet. Die unabhängigen Ströme sind jetzt die in den Längszweigen fließenden Ströme I_ν sowie Ein-

gangs- und Ausgangsstrom I_e und I_a . ν durchläuft bei der hier gewählten Numerierung alle geraden Zahlen. Die Aufstellung der Maschengleichungen geschieht jetzt so, daß die durch den unabhängigen Zweig mit Z_ν und die Zweige des vollständigen Baumes mit $Z_{\nu-1}$ und $Z_{\nu+1}$ gebildete Masche durchlaufen wird. Für den Fall, daß die Querleitwerte Y_1 und Y_n vorhanden sind, lautet dann das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I_e \cdot Z_1 + & \quad \quad \quad + Z_1 (I_e - I_2) = U_q \\ I_2 \cdot Z_2 + Z_1 (I_2 - I_e) + Z_3 (I_2 - I_4) &= 0 \\ & \vdots \\ I_{\nu-2} \cdot Z_{\nu-2} + Z_{\nu-3} (I_{\nu-2} - I_{\nu-4}) + Z_{\nu-1} (I_{\nu-2} - I_\nu) &= 0 \\ I_\nu \cdot Z_\nu + Z_{\nu-1} (I_\nu - I_{\nu-2}) + Z_{\nu+1} (I_\nu - I_{\nu+2}) &= 0 \\ I_{\nu+2} \cdot Z_{\nu+2} + Z_{\nu+1} (I_{\nu+2} - I_\nu) + Z_{\nu+3} (I_{\nu+2} - I_{\nu+4}) &= 0 \\ & \vdots \\ I_{n-1} \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2} (I_{n-1} - I_{n-3}) + Z_n (I_{n-1} - I_a) &= 0 \\ I_a \cdot Z_a + Z_n (I_a - I_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned} I_e &= -Y_1 [\quad \quad \quad + Z_1 (I_e - I_2) - U_q] \\ I_2 &= -Y_2 [+Z_1 (I_2 - I_e) + Z_3 (I_2 - I_4)] \\ & \vdots \\ I_{\nu-2} &= -Y_{\nu-2} [+Z_{\nu-3} (I_{\nu-2} - I_{\nu-4}) + Z_{\nu-1} (I_{\nu-2} - I_\nu)] \\ I_\nu &= -Y_\nu [+Z_{\nu-1} (I_\nu - I_{\nu-2}) + Z_{\nu+1} (I_\nu - I_{\nu+2})] \\ I_{\nu+2} &= -Y_{\nu+2} [+Z_{\nu+1} (I_{\nu+2} - I_\nu) + Z_{\nu+3} (I_{\nu+2} - I_{\nu+4})] \\ & \vdots \\ I_{n-1} &= -Y_{n-1} [+Z_{n-2} (I_{n-1} - I_{n-3}) + Z_n (I_{n-1} - I_a)] \\ I_a &= -Y_a [+Z_n (I_a - I_{n-1})]. \end{aligned} \quad (2)$$

In den Klammern auf der rechten Seite stimmt jeweils der 1. Term mit dem 2. Term der vorhergehenden Gleichung bis auf das Vorzeichen überein. Es handelt sich dabei um den Spannungsabfall an dem zu jeweils zwei Maschen gehörenden Querwiderstand. Wenn der Leitwert Y_1 bzw. Y_n verschwindet, fallen die ersten beiden bzw. die letzten beiden Gleichungen zu jeweils einer Gleichung zusammen:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_e = -Y_2 [Z_1 \cdot I_2 + Z_3 (I_2 - I_4) - U_q] \\ I_{n-1} &= I_a = -Y_{n-1} [Z_{n-2} (I_{n-1} - I_{n-3}) + Z_a \cdot I_{n-1}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Die übrigen Gleichungen in (2) bleiben erhalten.

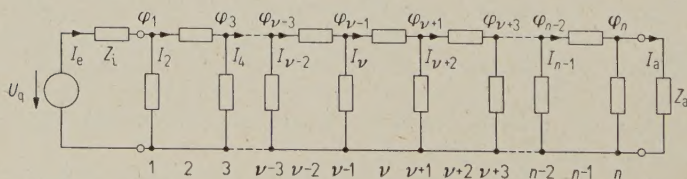


Bild 1. Die allgemeine Kettenschaltung.

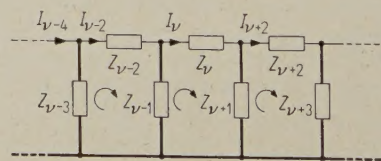


Bild 2. Zur Festlegung des vollständigen Baumes.

2.2. Die Darstellung am Analogrechner

Es wird nun angenommen, daß die auftretenden Leitwerte im Längszweig Y_2, Y_4, \dots, Y_{n-1} , die Widerstände im Querszweig Z_1, Z_3, \dots, Z_n und die Leitwerte bzw. Widerstände am Eingang und Ausgang Y_1 und Y_a bzw. Z_1 und Z_a als Übertragungsfunktionen am Analogrechner geschaltet werden können. Sie müssen dazu rationale Funktionen von p sein, die folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Nullstellen des Nennerpolynoms müssen in der offenen linken Halbebene oder im Nullpunkt liegen.
2. Der Grad des Zählerpolynoms darf höchstens gleich dem Grad des Nennerpolynoms sein.

Zweipolfunktionen sind rationale Funktionen in p , deren Pole in der abgeschlossenen linken Halbebene liegen, also auch auf der imaginären Achse liegen können (bei reinen Reaktanzen). Ohmsche Widerstände und Leitwerte sind unabhängig von p und damit vom Grade Null. Bei allen anderen Zweipolfunktionen unterscheiden sich Zähler- und Nennerpolynom im Grade stets um eins, d. h. der Grad des Zählerpolynoms kann auch um eins höher sein als der Grad des Nennerpolynoms. Eine Vielzahl von Zweipolfunktionen kann daher nicht als Übertragungsfunktion am Analogrechner geschaltet werden. Wenn dagegen alle in der Abzweigschaltung vorkommenden Zweipolfunktionen den Bedingungen genügen, kann man eine Schaltung angeben, deren Struktur genau der Abzweigschaltung entspricht. In Bild 3 zeigt die erste Zeile noch einmal die Abzweigschaltung mit den beiden möglichen Eingangs- und Ausgangsschaltungen.

Die zugehörige Schaltung am Analogrechner ist im Blockschaltbild in der zweiten Zeile angegeben. Widerstände und Leitwerte erscheinen als Übertragungsfunktionen, die ihre Ausgangs- und Eingangsfunktionen durch die Beziehung $S_2(p) = A(p) \cdot S_1(p)$ verknüpfen. Hier sind $S_1(p)$ und $S_2(p)$ die Laplacetransformierten der zugehörigen Zeitfunktionen. Die Querwiderstände haben zwei Eingänge erhalten. Das deutet an, daß die Summe der an beide Eingänge gelegten Funktionen mit der Übertragungsfunktion multipliziert wird. Weiterhin enthält die Schaltung das Symbol für einen Umkehrverstärker, der an seinem Ausgang die negative Summe der an die Eingänge gelegten Funktionen liefert. Es entsteht eine Schaltung, deren Struktur eine enge Verwandtschaft zur ursprünglichen Abzweigschaltung hat. Man erkennt, wie z. B. im Querwiderstand Z_{v-1} die Ströme $+I_v$ und $-I_{v-2}$ zusammenlaufen. Die dem Spannungsabfall $Z_{v-1} \cdot (I_v - I_{v-2})$ entsprechende Funktion ist dann, wie

erforderlich, in beiden benachbarten Maschen bei der Bildung der Ströme I_{v-2} und I_v beteiligt. Die Pfeile deuten an, wie die Schaltung durchlaufen wird. Bemerkenswert ist, daß die Maschenströme abwechselnd positiv und negativ erscheinen. Das liegt an der Ausnutzung der eben schon betonten engen Beziehung zwischen den Termen auf der rechten Seite in Gl. (2).

Wie schon erwähnt, läßt sich eine Reihe von Schaltungen auf diese Weise nicht am Analogrechner darstellen. Eine weitere Klasse wird erfaßt, wenn man nicht von Gl. (2) ausgeht, sondern in (2) zunächst die äußeren Klammern auflöst:

$$\begin{aligned} I_e &= -Y_1 \cdot Z_1 (I_e - I_2) + Y_1 \cdot U_q \\ I_2 &= -Y_2 \cdot Z_1 (I_2 - I_e) - Y_2 \cdot Z_3 (I_2 - I_4) \\ &\vdots \\ I_{v-2} &= -Y_{v-2} \cdot Z_{v-3} (I_{v-2} - I_{v-4}) - Y_{v-2} \cdot Z_{v-1} (I_{v-2} - I_v) \\ I_v &= -Y_v \cdot Z_{v-1} (I_v - I_{v-2}) - Y_v \cdot Z_{v+1} (I_v - I_{v+2}) \\ I_{v+2} &= -Y_{v+2} \cdot Z_{v+1} (I_{v+2} - I_v) - Y_{v+2} \cdot Z_{v+3} (I_{v+2} - I_{v+4}) \\ &\vdots \\ I_{n-1} &= -Y_{n-1} \cdot Z_{n-2} (I_{n-1} - I_{n-3}) - Y_{n-1} \cdot Z_n (I_{n-1} - I_a) \\ I_a &= -Y_a \cdot Z_n (I_a - I_{n-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Sind Eingangs- und Ausgangsschaltung anders, so ergeben sich die Gleichungen entsprechend (3).

Die entstehenden Produkte $Y_v \cdot Z_{v-1}$ lassen sich in bestimmten Fällen auch dann als Übertragungsfunktionen darstellen, wenn eine der Einzelfunktionen selbst wegen Verstoßes gegen die Bedingung 2 für Übertragungsfunktionen nicht geschaltet werden kann. Tabelle I zeigt, daß der Grad der Übertragungsfunktion $Y_v \cdot Z_{v-1}$ im Unendlichen (das ist der Unterschied des Grades von Zähler- und Nennerpolynom) $\pm 2, \pm 1$ oder 0 beträgt, wenn für Y_v

Tabelle I. Grad von $Y_v \cdot Z_{v-1}$ im Unendlichen.

$Z_{v-1} \backslash Y_v$	+1	0	-1
+1	+2	+1	0
0	+1	0	-1
-1	0	-1	-2

bzw. Z_{v-1} die in der Kopfzeile bzw. Seitenspalte angegebenen möglichen Grade im Unendlichen eingesetzt werden. Der stark umrandete Teil wurde bereits bei der direkten Realisierung erfaßt. Die Darstellung des Produktes $Y_v \cdot Z_{v-1}$ ist zusätzlich in den durch die gestrichelte Umrandung gezeichneten Fällen möglich. Die Tabelle I zeigt, daß sich nicht realisierbare Funktionen $Y_v \cdot Z_{v-1}$ ergeben können, wenn der Längsleitwert Y_v oder der Querwiderstand Z_{v-1} oder beide bei hohen Frequenzen wachsen, d. h.

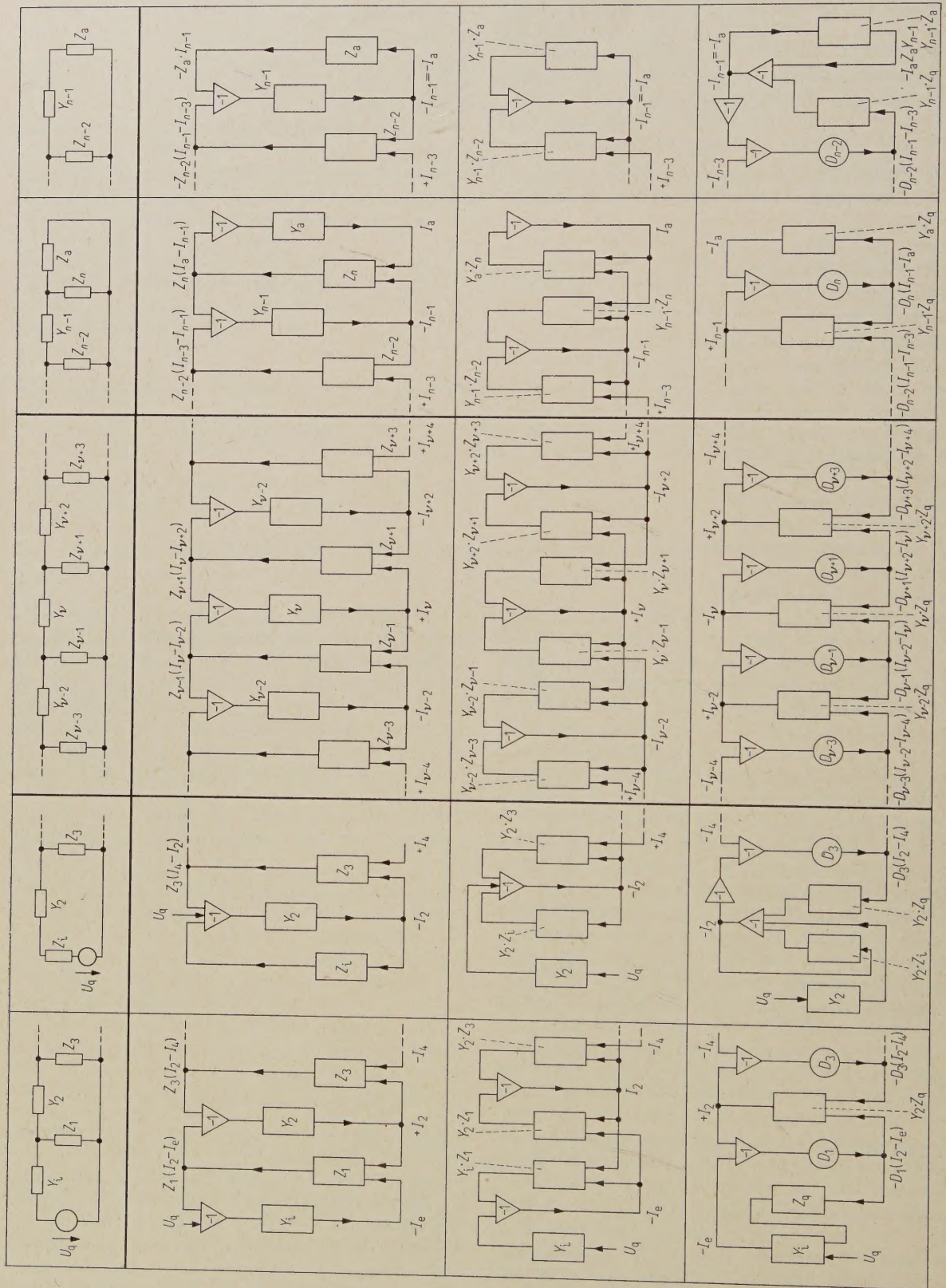


Bild 3. Darstellung der Abzweigschaltung am Analogrechner.

bei hochpaß- oder bandstopfartigen Schaltungen. Da aber durch geeignete Frequenztransformation zumindest die wichtigsten Schaltungen auf tiefpaßförmige Grundsaltungen zurückgeführt werden können, bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn die folgenden Ausführungen sich auf die Abzweigschaltungen beschränken, die auf realisierbare Übertragungsfunktionen führen. Es handelt sich dabei um tiefpaß-, bandpaß- und allpaßförmige Schaltungen.

Es ist noch zu erwähnen, daß die hier ausgeschlossenen Abzweigschaltungen auf anderem Wege ebenfalls am Analogrechner geschaltet werden können. In einfachen Fällen erreicht man dabei auch die angestrebte Einstellung der Größe eines Bauelementes mit nur einem Rechenpotentiometer. Schaltbild und Rechenschaltbild entsprechen sich dagegen nicht mehr so wie in den hier diskutierten Fällen. Auf die Darstellung wird hier verzichtet.

In Bild 3 zeigt die 3. Zeile, welches Blockschaltbild sich am Analogrechner ergibt. Die Verwandtschaft mit der Struktur der Abzweigschaltung ist jetzt nicht mehr so eng. Man erkennt aber, daß jeder Masche eine bausteinartige Schaltung entspricht. Die Maschenströme ergeben sich wieder abwechselnd mit positivem und negativem Vorzeichen. Der Aufwand für eine Schaltung dieser Art ist wesentlich größer als bei der unmittelbaren Darstellung der Einzelzweipolfunktionen, da jedes Element in zwei Übertragungsfunktionen berücksichtigt werden muß. Wegen der zu erwartenden Instabilitäten ist die Schaltung praktisch kaum zu verwenden. Sie wurde hier nur der Vollständigkeit wegen gebracht.

2.3. Kettenschaltung mit gleichartigen Querwiderständen

In vielen praktisch wichtigen Fällen unterscheiden sich die Widerstände im Querzweig nur durch einen konstanten Faktor. Die Schaltung von Zeile 3 in Bild 3 läßt sich dann wesentlich vereinfachen. Eine ganz entsprechende Vereinfachung läßt sich auch dann erreichen, wenn die Widerstände im Längszweig bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen. Da dieser Fall praktisch keine große Bedeutung hat, wird er hier nicht behandelt.

Es sei $Z_{v-3} = D_{v-3} \cdot Z_q$, (Z_q Querwiderstand),

$$Z_{v-1} = D_{v-1} \cdot Z_q, \quad D_{v-3} \dots \text{Konstante},$$

$$Z_{v+1} = D_{v+1} \cdot Z_q.$$

Aus Gl. (2) folgt dann:

$$\begin{aligned} I_e &= -Y_1 \cdot Z_q [\quad \quad \quad + D_1 (I_e - I_2)] + U_q \cdot Y_1 \\ I_2 &= -Y_2 \cdot Z_q [D_1 (I_2 - I_e) + D_3 (I_2 - I_4)] \\ &\vdots \\ I_{v-2} &= -Y_{v-2} \cdot Z_q [D_{v-3} (I_{v-2} - I_{v-4}) + D_{v-1} (I_{v-2} - I_v)] \\ I_v &= -Y_v \cdot Z_q [D_{v-1} (I_v - I_{v-2}) + D_{v+1} (I_v - I_{v+2})] \\ I_{v+2} &= -Y_{v+2} \cdot Z_q [D_{v+1} (I_{v+2} - I_v) + D_{v+3} (I_{v+2} - I_{v+4})] \\ &\vdots \\ I_{n-1} &= -Y_{n-1} \cdot Z_q [D_{n-2} (I_{n-1} - I_{n-3}) + D_n (I_{n-1} - I_a)] \\ I_a &= -Y_a \cdot Z_q [D_n (I_a - I_{n-1})]. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Gleichungen für andere Eingangs- und Ausgangsschaltungen ergeben sich entsprechend Gl. (3).

In Gl. (5) stimmen jetzt wieder der erste Term in der Klammer der rechten Seite mit dem 2. Term in der Klammer der vorhergehenden Gleichung bis auf das Vorzeichen überein. Das führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Schaltung, die in der 4. Zeile von Bild 3 angegeben ist. Die Schaltung enthält als neues Symbol das Zeichen für ein Potentiometer, mit dem die Multiplikation mit dem konstanten Faktor D_{v-1} vorgenommen wird. Man erkennt, daß die Verwandtschaft mit der ursprünglichen Abzweigschaltung wieder enger geworden ist.

Eine nähere Betrachtung zeigt, daß der Aufwand an Integratoren bei dieser Schaltung in den Fällen, in denen die Schaltung angewendet werden muß, im allgemeinen kleiner als die Zahl der Energiespeicher ist. Das erlaubt allerdings noch keine Aussage über die Stabilität der Schaltung, da in diesen Fällen der Grad der Übertragungsfunktion kleiner ist als die Zahl der Energiespeicher. Bei der Nachbildung eines Tiefpasses n -ten Grades mit m Dämpfungspolen werden z. B. $n + 1$ Integratoren benötigt, während $n + m$ Energiespeicher beteiligt sind. Nach den bisherigen Erfahrungen kann man dabei die Schaltungsungenauigkeiten sehr gut mit Abgleichpotentiometern ausgleichen und eine Instabilität vermeiden.

2.4. Abschließende Bemerkungen

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man die hier gezeigten Schaltungen auch mit den in [1] behandelten kombinieren. Wenn eine rückwirkungsfreie Zusammenschaltung möglich ist, kann man die am Ausgang erscheinende Zeitfunktion als Eingangsgröße für die Rechenschaltung benutzen, die nach [1] entsprechend der Pol- und Nullstellenverteilung der Übertragungsfunktion aufgebaut wird. Macht man z. B. den Abschlußwiderstand Z_a einer Abzweigschaltung obiger Art gleich dem theoretisch sich ergebenden Eingangswiderstand eines nachzuschaltenden Bausteins, so kann man die Funktion $I_a \cdot Z_a$ unmittelbar als Eingangsgröße benutzen, da der Baustein selbst keine Rückwirkung hat. Sehr leicht ist das bei Allpässen möglich. Der Eingangswiderstand einer reinen Allpaßschaltung, die mit ihrem konstanten Wellenwiderstand abgeschlossen ist, ist frequenzunabhängig gleich R . Man macht den Abschlußwiderstand Z_a der Abzweigschaltung gleich diesem Eingangswiderstand und kann die Funktion $I_a \cdot R$ oder, da eine multiplikative Konstante ohne Bedeutung ist, I_a selbst als Eingangsfunktion für den nachgeschalteten Allpaß benutzen, der seinen Pol- und Nullstellen entsprechend aufgebaut ist. Auf diese Weise wird auch die Einbeziehung von Allpässen

zur Laufzeitentzerrung möglich, die mit den bisher behandelten Abzweigschaltungen nicht aufgebaut werden können, da sie entweder als X-Schaltung oder als kopplungsbehaftete Abzweigschaltung aufgebaut werden.

Die bisher mit der Maschenanalyse durchgeführte Untersuchung kann man ebenso mit der Knotenanalyse vornehmen. Als Lösungen erscheinen dann nicht die Maschenströme, sondern die Knotenpunktpotentiale. Man erhält Rechenschaltungen,

die mit den hier gezeigten sehr eng verwandt sind. Das zeigt sich schon darin, daß an bestimmten Punkten in den Schaltungen von Bild 3 Funktionen erscheinen, die den Potentialen an den Knotenpunkten entsprechen. Zum Beispiel ist in der 2. Zeile von Bild 3 die am Ausgang der Übertragungsfunktion Z_{v-1} erscheinende Funktion $Z_{v-1}(I_v - I_{v-2})$ gleich dem Potential φ_{v-1} . Auf eine ausführliche Darstellung der Verwandtschaft wird hier verzichtet.





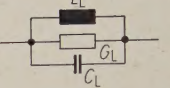

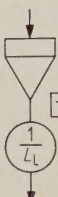
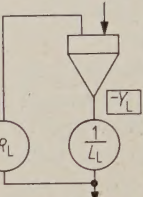

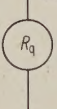


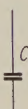



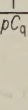





Längsleitwert Y_L		 G_L	 $\frac{1}{pL_L}$	 $\frac{1}{pL_L + R_L}$	 $\frac{1 + p^2 L_L C_L}{pL_L}$	 $\frac{1 + pL_L G_L + p^2 L_L C_L}{pL_L}$
Querwiderstand Z_q	Schaltung	 G_L	 $\frac{1}{L_L}$	 R_L	—	—
	 R_q	 R_q	 R_q	 R_q	—	—
		$R_q G_L$	$\frac{R_q}{pL_L}$	$\frac{R_q}{pL_L + R_L}$	$R_q \frac{1 + p^2 L_L C_L}{pL_L}$	$R_q \frac{1 + pL_L G_L + p^2 L_L C_L}{pL_L}$
	 C_q	 $\frac{1}{C_q}$	 $\frac{1}{C_q}$	 $\frac{1}{C_q}$	$\frac{1}{pC_q} \frac{1 + p^2 L_L C_L}{pL_L} = \frac{1}{C_q} \left(\frac{1}{p^2 L_L} + C_L \right)$	$\frac{1}{pC_q} \frac{1 + pL_L G_L + p^2 L_L C_L}{pL_L} = \frac{1}{C_q} \left(\frac{1}{p^2 L_L} + \frac{G_L}{p} + C_L \right)$
		$\frac{1}{pC_q} G_L$	$\frac{1}{pC_q} \frac{1}{pL_L}$	$\frac{1}{pC_q} \frac{1}{pL_L + R_L}$	$\frac{1}{pC_q} \frac{1 + p^2 L_L C_L}{pL_L} = \frac{1}{C_q} \left(\frac{1}{p^2 L_L} + C_L \right)$	$\frac{1}{pC_q} \frac{1 + pL_L G_L + p^2 L_L C_L}{pL_L} = \frac{1}{C_q} \left(\frac{1}{p^2 L_L} + \frac{G_L}{p} + C_L \right)$
	 $\frac{1}{pC_q}$	 $\frac{1}{C_q}$	 $\frac{1}{C_q}$	 $\frac{1}{C_q}$	 $\frac{1}{C_q}$	 $\frac{1}{C_q}$

Bild 4. Bausteinschaltungen für die einfachsten Zweipole.

3. Beispiele

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die am Analogrechner darzustellenden Abzweigschaltungen bereits in normierter Form vorliegen. Mit Hilfe einer normierenden Frequenz ω_N und eines normierenden Widerstandes R_N sollen also alle Bauelemente bereits in bekannter Weise in dimensionslose Größen umgerechnet worden sein. Die Wahl von ω_N und R_N muß dabei so erfolgen, daß sich Zahlenwerte ergeben, die am Analogrechner eingestellt werden können (Integrationsfaktoren etwa ≤ 100).

In Bild 4 sind für die wichtigsten Zweipole die Schaltungsbausteine zusammengestellt. Im Längszweig wurden außer dem ohmschen Widerstand und reinen Reaktanzen auch die verlustbehaftete Spule und der verlustbehaftete Parallelschwingkreis berücksichtigt, im Querszweig nur der ohmsche Widerstand und der Kondensator.

In der 2. Zeile bzw. der 2. Spalte sind zunächst die unmittelbaren Realisierungen der Leitwerte bzw. Widerstände angegeben, soweit sie am Analogrechner möglich sind, so wie sie bei der Schaltung nach Zeile 2 von Bild 3 benötigt werden. Es erscheint hier zusätzlich das bekannte Symbol für den Integrator, der an seinem Ausgang die negative Summe der Integrale der Eingangsfunktionen liefert. In drei Fällen wird hier nicht die Funktion Y_L bzw. Z_q dargestellt, sondern ihr negativer Wert. Bei der Zusammenstellung der Gesamtschaltung kann das ohne Schwierigkeiten berücksichtigt werden.

Die Produkte $Z_q \cdot Y_L$ sind in den übrigen Stellen von Bild 4 als Formel und Schaltung angegeben. Dabei gibt es für den Parallelschwingkreis mit und ohne Verluste im Längszweig keine realisierende Schaltung, da der Zähler von höherem Grade als der Nenner ist. Liegt im Querszweig ein Kondensator, so ergeben sich Schaltungen mit nur zwei Integratoren, obwohl drei Energiespeicher beteiligt sind, so wie schon im Abschnitt 2.4 erwähnt. Auch hier ergeben sich in einigen Fällen Schaltungen, deren Übertragungsfaktoren ein negatives Vorzeichen haben. Bei den Schaltungen für $Z_q \cdot Y_L$ wurde berücksichtigt, daß stets die Summe zweier Eingangsgrößen mit der Übertragungsfunktion multipliziert werden muß. Am Eingang muß daher stets ein summierender Integrator oder Umkehrverstärker liegen.

Bei allen Schaltungen von Bild 4 erkennt man, daß die Größe jedes Bauelementes stets durch ein einziges Potentiometer unabhängig von allen übrigen eingestellt werden kann. Damit wird die Handhabung der Schaltung außerordentlich einfach und übersichtlich.

Die Bilder 5 und 6 zeigen als Beispiele die Rechenschaltungen für zwei Tiefpässe, die aus einem Generator mit ohmschem Innenwiderstand betrieben werden und mit einem ohmschen Widerstand abgeschlossen sind. Beim Polynomfilter nach Bild 5

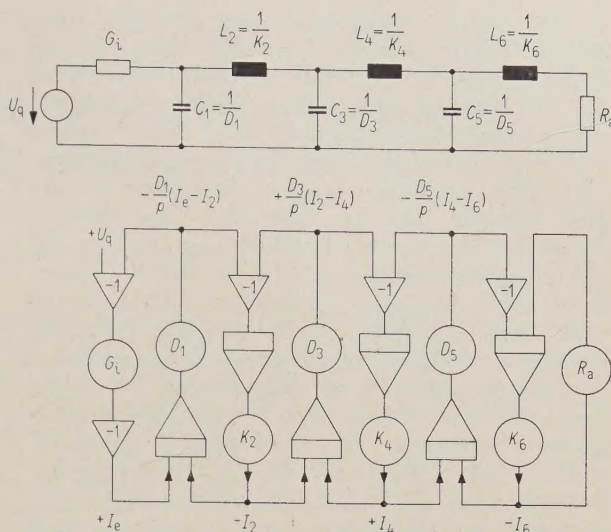


Bild 5. Schaltung für ein Polynomfilter 6. Grades;

$$\begin{aligned} I_e &= -G_1 \left[\frac{D_1}{p} (I_e - I_2) - U_q \right], \\ I_2 &= -\frac{K_2}{p} \left[\frac{D_1}{p} (I_2 - I_e) + \frac{D_3}{p} (I_2 - I_4) \right], \\ I_4 &= -\frac{K_4}{p} \left[\frac{D_3}{p} (I_4 - I_2) + \frac{D_5}{p} (I_4 - I_6) \right], \\ I_6 &= I_a = -\frac{K_6}{p} \left[\frac{D_5}{p} (I_6 - I_4) + R_a I_6 \right]. \end{aligned}$$

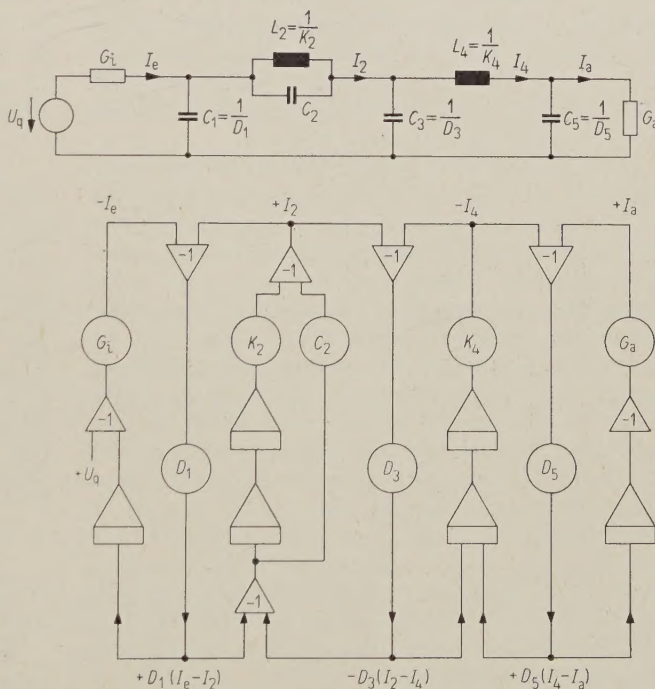


Bild 6. Tiefpaß 5. Grades mit einem Dämpfungspol;

$$\begin{aligned} I_e &= -G_1 \frac{1}{p} [D_1 (I_e - I_2)] + G_1 U_q, \\ I_2 &= -\left(K_2 \frac{1}{p^2} + C_2 \right) [D_1 (I_2 - I_e) + D_3 (I_2 - I_4)], \\ I_4 &= -K_4 \frac{1}{p^2} [D_3 (I_4 - I_2) + D_5 (I_4 - I_a)], \\ I_a &= -G_a \frac{1}{p} [D_5 (I_a - I_4)]. \end{aligned}$$

ist die direkte Realisierung der Zweipole nach Zeile 2, Bild 3 möglich. Verzichtet man auf die Multiplikation von U_q mit dem konstanten Wert G_1 , was sicher in den meisten Fällen möglich ist, oder verwendet man hier ein zweites Potentiometer mit der gleichen Einstellung, so lassen sich am Eingang zwei Umkehrverstärker einsparen. Es sei noch bemerkt, daß man hier auch ohne weiteres negative Bauelemente darstellen kann, solange die Gesamtschaltung dabei stabil bleibt. Ein Fortlassen des Umkehrverstärkers im Zweig für K_2 bedeutet z. B., daß $L_2 = 1/K_2$ negativ geworden ist. Das bedeutet u. a., daß sich auch gewisse Ersatzschaltungen kopplungsbehafteter Schaltungen in dieser Form darstellen lassen. Bild 6 zeigt eine kompliziertere Schaltung, die nach dem 3. Verfahren (Bild 3, Zeile 4) aufgebaut ist. Die Übertragungsfunktionen $Y_2 \cdot Z_q$ und $Y_4 \cdot Z_q$ wurden Bild 4 entnommen. Es handelt sich um ein Filter mit fünf Polstellen der Übertragungsfunktionen, für dessen Darstellung sechs Integratoren benötigt werden. Der Mehraufwand ergibt sich, weil C_1 bzw. C_5 sowohl in Verbindung mit den Längswiderständen, als auch in Verbindung mit G_1 bzw. G_a erscheinen.

Es sei noch bemerkt, daß sich wesentliche Einsparungen an Integratoren und Umkehrverstärkern erreichen lassen, wenn man kompliziertere Rückkopplungs- und Eingangsnetzwerke für die Verstärker verwendet. Man kann dann unter Umständen eine kompliziertere Übertragungsfunktion, so wie sie als Baustein in Bild 4 erscheint, mit einem oder zwei Verstärkern herstellen. Dabei geht allerdings in vielen Fällen die leichte und übersichtliche Einstellbarkeit der Elemente verloren.

Schließlich sei noch auf eine praktische Schwierigkeit beim Aufbau einer Rechenschaltung hingewiesen. Der Analogrechner arbeitet dann am genauesten, wenn die Verstärker voll ausgesteuert werden. Durch entsprechende Transformation kann man meist dieser Forderung genügen. Bei den hier behandelten Schaltungen geht das nicht, wenn die bei dem ursprünglich gegebenen Netzwerk auftretende Spannungs- und Stromverteilung ungünstig ist, d. h., wenn an den verschiedenen Punkten extrem verschiedene Spannungen und Ströme vorliegen. Da die Rechenschaltung ein getreues Abbild der Ausgangsschaltung ist, müssen dann auch die am Rechner auftretenden Funktionen diese extremen Unterschiede zeigen. Die Genauigkeit der Ergebnisse kann dabei wesentlich leiden. Man ist dann gezwungen, den Weg über die Berechnung der Übertragungsfunktion zu gehen, deren Rechenschaltung flexibler aufgebaut werden kann.

4. Messungen des Zeit- und Frequenzverhaltens

Ebenso wie bei den in [1] behandelten Schaltungen kann man auch hier sowohl das Zeit- als auch das Frequenzverhalten der untersuchten Netzwerke dadurch messen, daß man ebenso wie bei einem aus konzentrierten Bauelementen aufgebauten Vierpol eine impulsförmige oder eine sinusförmige Spannung auf den Eingang gibt und dann die Ausgangs-

spannung mißt. Dabei lassen sich alle Verfahren anwenden, die schon in [1] ausführlich beschrieben wurden. Gegenüber der geschlossenen Darstellung der Übertragungsfunktion hat der hier beschriebene Aufbau des Netzwerkes den Vorteil, daß man auch die interessierenden Ströme und Spannungen im Inneren der Schaltung bestimmen kann. Darüber hinaus kann man auch z. B. den Eingangswiderstand des Vierpols messen, wenn man, genau wie bei einem aus konzentrierten Bauelementen aufgebauten Vierpol, bei Speisung mit konstantem Strom die Spannung am Eingang mißt. Es ist dabei nur eine gewisse Änderung der Eingangsschaltung erforderlich.

Der Meßvorgang selbst bereitet unter Umständen deshalb apparative Schwierigkeiten, weil bei sehr niedrigen Frequenzen gemessen werden muß. Mit den schon in [1] geschilderten Methoden lassen sich trotzdem im Rahmen der Genauigkeit des verwendeten Analogrechners befriedigende Ergebnisse erzielen.

Mit den nach dem hier beschriebenen Verfahren aufgebauten Rechenschaltungen lassen sich alle die Aufgaben der Filtertheorie experimentell behandeln, die auch mit dem in [9] beschriebenen Modell bearbeitet worden sind. Der Vorteil ist hier, daß auch exakt verlustfreie Schaltungen sowie, falls erforderlich, Schaltungen mit negativen Bauelementen untersucht werden können. Der Nachteil ist, daß die Genauigkeit der Analogrechner sowie die hier erzielbare Meßgenauigkeit für gewisse Aufgaben des Filterentwurfs (z. B. stark sperrende Filter) nicht ausreichen wird.

5. Zusammenfassung

Nach dem gezeigten Verfahren lassen sich bestimmte kopplungsfreie Abzweigschaltungen bausteinartig und schaltbildgetreu auf den Analogrechner übertragen. Wie bei einem aus tatsächlichen Elementen aufgebauten Netzwerk lassen sich dann alle interessierenden Eigenschaften meßtechnisch bestimmen. Die Variation der Einstellung der Potentiometer bedeutet die direkte Variation der Größe der Bauelemente der Schaltung und gestattet, z. B. bei Optimierungsaufgaben unmittelbar die optimale Schaltung zu finden.

Schrifttum

- [1] SCHÜSSLER, W., Schaltung und Messung von Übertragungsfunktionen an einem Analogrechner. A.E.Ü. **13** [1959], 405–419.
- [2] HERRMANN, H., Analogie-Rechenmaschinen in „Handbuch der Automatisierungstechnik“. Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik, Berlin 1959.
- [3] ERNST, D., Elektronische Analogrechner. R. Oldenbourg Verlag, München 1960.
- [4] LAROWE, V. L., Direct simulation bypasses mathematics. Control Engng. **1** [1954], Nov., 25–31.
- [5] WALTERS, L. G., Hidden regenerative loops in electronic analog computers. Transact. Inst. Radio Engrs. EC-2 [1953], Nr. 2, 1–4.
- [6] SCOTT, N. R., On the use of redundant integrators in analog computers. Transact. Inst. Radio Engrs. EC-6 [1957], Nr. 4, 287.
- [7] OTTERMANN, J., How to avoid extra integrators when simulating RLC networks. Control Engng. **4** [1957], 111–114.
- [8] OTTERMANN, J., On the loop- and node-analysis approaches to simulation of electrical networks. Transact. Inst. Radio Engrs. EC-7 [1958], Nr. 3, 199–206.
- [9] POSCHENRIEDER, W. und SONTHEIM, H., Ein Analogiegerät für Aufgaben der Filterentwicklung. Frequenz **13** [1959], 379–384.

Die Matrix eines Kettenleiters aus gleichen Vierpolen (Darstellung der beliebigen Potenz einer Matrix)

Von GUSTAV DOETSCH

(A.E.Ü. 14 [1960], 335 – 340; eingegangen am 20. Juni 1960)

DK 621.372.5

Ein Vierpol ist durch eine Matrix \mathbf{M} charakterisiert, die Spannung und Strom am Eingang mit denselben Größen am Ausgang verknüpft. Werden n gleiche Vierpole durch Kettenschaltung zu einem Kettenleiter vereinigt, so ist dessen Matrix gleich der n -ten Potenz von \mathbf{M} . Für die Matrix \mathbf{M}^n wird ein expliziter Ausdruck hergeleitet, der in den praktisch auftretenden Fällen, bei denen die Matrixelemente komplexe Größen sind, leicht berechnet werden kann, weil er nur hyperbolische Funktionen benutzt, die auch für komplexe Argumente tabelliert sind.

A four-terminal network is characterized by a matrix \mathbf{M} , which links voltage and current at the input terminals with the same quantities at the output terminals. If n equal four-terminal networks are connected in cascade, the matrix of the resultant four-terminal network is equal to \mathbf{M}^n . For the matrix \mathbf{M}^n there is given an explicit expression, which can be calculated easily in practical cases where the elements of \mathbf{M} are complex quantities, because only hyperbolic functions are used, which are tabulated also for complex arguments.

1. Problemstellung

Sind Spannung und Stromstärke am Eingang eines Vierpols sinusartig, d. h. von der Form $E_0 e^{i\omega t}$, $I_0 e^{i\omega t}$, so sind sie im stationären Zustand am Ausgang ebenfalls sinusartig mit derselben Frequenz, also von der Form $E_1 e^{i\omega t}$, $I_1 e^{i\omega t}$, und es gelten die Vierpolgleichungen

$$\begin{aligned} E_0 &= AE_1 + BI_1, \\ I_0 &= CE_1 + DI_1, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathbf{M}$$

die den Vierpol charakterisierende Matrix ist. Die Gleichungen (1) schreiben sich im Matrizenkalkül kürzer

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente A, B, C, D sind im allgemeinen komplexe Funktionen der Frequenz ω ¹.

Werden n gleiche Vierpole in Kettenschaltung (Kaskadenschaltung) zu einem Kettenleiter verbunden, so ist mit der aus Bild 1 ersichtlichen Bezeichnung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_0 \\ I_0 \end{pmatrix} &= \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} E_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \dots, \\ \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ I_{n-1} \end{pmatrix} &= \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ I_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^n \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ I_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Der Kettenleiter ist also ein Vierpol, dessen Matrix gleich der n -ten Potenz der Matrix \mathbf{M} des einzelnen Vierpols ist.

¹ Handelt es sich nicht um sinusartige, sondern um beliebige Spannungen $E_\nu(t)$ und Ströme $I_\nu(t)$ ($\nu = 0, 1$), so gelten die Vierpolgleichungen für die Laplace-Transformierten dieser Funktionen, wobei die A, \dots, D Funktionen der komplexen Variablen s sind.

Führt man die Potenzierung durch sukzessive Multiplikation aus, so ist klar, daß die Elemente von \mathbf{M}^n ganze rationale Funktionen der vier Variablen A, \dots, D werden, weil dabei nur Produkte und Summen zu bilden sind. Da die praktische Durchführung der sukzessiven Multiplikationen äußerst mühsam ist, besonders weil die A, \dots, D komplexe Zahlen sind, ist es wünschenswert, einen expliziten Ausdruck für \mathbf{M}^n zu besitzen. Ein solcher ist in den letzten Jahren auf verschiedene Weise geliefert worden. Nach Angabe von DOLEŽAL [1] hat zuerst

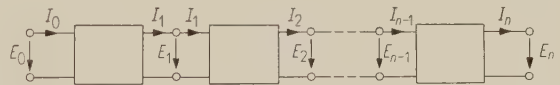


Bild 1. Kettenleiter aus n gleichen Vierpolen.

PEASE [2] 1952 gewisse universelle Polynome $Q_n(x, y)$ von zwei Variablen eingeführt, durch die sich \mathbf{M}^n in der Gestalt

$$\mathbf{M}^n = Q_n(A + D, d) \mathbf{M} + d Q_{n-1}(A + D, d) \mathbf{I} \quad (3)$$

darstellen läßt, wobei $d = \det \mathbf{M}$ und \mathbf{I} die Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, woran sich einige weitere, in [1] zitierte Arbeiten angeschlossen haben. Der erste einwandfreie Beweis von Gl. (3) wurde 1958 vermittle vollständiger Induktion von DOLEŽAL [1] geliefert, der auch eine große Anzahl von Eigenschaften der Polynome Q_n ermittelt hat. Auf andere Art hat 1958 GRÖBNER [3] die Matrixpotenz berechnet, indem er \mathbf{M} zunächst durch eine Transformation \mathfrak{T} in eine Diagonalmatrix \mathcal{A} überführt:

$$\mathfrak{T} \mathbf{M} \mathfrak{T}^{-1} = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte der Matrix (Wurzeln der charakteristischen Gleichung) sind. \mathcal{A} läßt sich

leicht potenzieren:

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix},$$

worauf M^n durch Rücktransformation aus A^n gewonnen wird: $M^n = \mathfrak{T}^{-1} A^n \mathfrak{T}$.

Im folgenden wird eine Darstellung von M^n angegeben, die vom Standpunkt der Anwendungen aus folgende Vorzüge hat:

1. Sie enthält nur Funktionen, die auch für komplexe Argumente, die in der Elektrotechnik vorzugsweise in Frage kommen, tabelliert sind, ist daher in der Praxis leicht zu berechnen.
2. Sie drückt M^n durch eine Matrix aus, die von $A - D$ abhängt, und setzt daher (im Gegensatz zu den vorher erwähnten Darstellungen) die Vereinfachung, die sich im Fall eines symmetrischen Vierpols ($A = D$) ergibt, unmittelbar in Evidenz.
3. Der Beweis beruht auf einem Hilfsmittel, das dem Elektrotechniker auch sonst im Zusammenhang mit der Theorie der Kettenleiter geläufig ist, nämlich auf der Verwendung von Differenzengleichungen.
4. Die Methode läßt unmittelbar erkennen, wie man von dem Spezialfall $\det M = 1$ (passiver Vierpol), den wir wie die oben genannten Autoren an erster Stelle behandeln, zu dem allgemeinen Fall einer beliebigen $\det M$ übergehen kann.

2. Der Fall $\det M = 1$ (passiver Vierpol)

Wenn der Buchstabe n , der oben die Anzahl der Vierpole bedeutete, der Einfachheit halber auch für den laufenden Index verwendet wird, so besteht zwischen den Eingangsfunktionen E_n, I_n und den Ausgangsfunktionen E_{n+1}, I_{n+1} des n -ten Vierpols ($n = 0, 1, \dots$) dieselbe Beziehung wie nach Gl. (1) zwischen E_0, I_0 und E_1, I_1 , d. h.

$$E_n = A E_{n+1} + B I_{n+1},$$

$$I_n = C E_{n+1} + D I_{n+1}.$$

Diese Gleichungen kann man auffassen als ein System von zwei Differenzengleichungen erster Ordnung für die Folgen E_n, I_n , deren „Anfangswerte“ E_0, I_0 vorgegeben sind. Die Lösung wird E_n, I_n als lineare Funktionen von E_0, I_0 darstellen. Kehrt man diese Beziehung um, indem man nach E_0, I_0 auflöst, so muß die Matrix nach Gl. (2) gleich M^n sein.

Ein System von Differentialgleichungen unter Anfangsbedingungen behandelt man bekanntlich am zweckmäßigsten mit der Laplace-Transformation. Das Gleiche gilt auch für ein System von Differenzengleichungen mit gegebenen Anfangswerten, wobei man in diesem Fall statt der üblichen „kontinuierlichen“ Laplace-Transformation auch die „diskrete“ Laplace-Transformation nach ZYPKIN [4] oder die damit äquivalente Potenzreihen-Transformation, auch Z-Transformation genannt (siehe z. B. TRUXAL [5]), benutzen kann; alle drei Methoden gehen durch einfache Substitutionen ineinander über. Da die Laplace-Transformation am bekanntesten ist, sei diese verwendet.

Dazu hat man zunächst aus der diskontinuierlichen Folge E_n eine für kontinuierliches Argument definierte Treppenfunktion $E(t)$ zu machen² durch die Definition

$$E(t) = E_n \text{ für } n \leq t < n+1 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Dann gilt offenbar für die Funktionen $E(t), I(t)$ das System von „Differenzengleichungen mit kontinuierlicher Variablen“

$$\begin{aligned} E(t) &= A E(t+1) + B I(t+1), \\ I(t) &= C E(t+1) + D I(t+1), \end{aligned} \quad (4)$$

wobei die „Anfangswerte“

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \\ I(t) &= I_0 \end{aligned} \quad \text{für } 0 \leq t < 1$$

gegeben sind.

Die durch die Laplace-Transformation vermittelte Beziehung zwischen der Originalfunktion $E(t)$ und ihrer Bildfunktion $e(s)$ bezeichnen wir durch den Operator \mathfrak{L} , also

$$\mathfrak{L}\{E(t)\} = e(s),$$

oder gelegentlich durch das Korrespondenzzeichen $\circ \rightarrow \bullet$, also

$$E(t) \circ \rightarrow \bullet e(s).$$

Nach dem zweiten Verschiebungssatz³ gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{E(t+1)\} &= e^s \left[e(s) - \int_0^1 e^{-st} E(t) dt \right] = \\ &= e^s \left[e(s) - E_0 \frac{1 - e^{-s}}{s} \right] = e^s e(s) - E_0 \frac{e^s - 1}{s}. \end{aligned}$$

Daher entsprechen den Originalgleichungen (4) die Bildgleichungen

$$\begin{aligned} e(s) &= A \left[e^s e(s) - E_0 \frac{e^s - 1}{s} \right] + \\ &+ B \left[e^s i(s) - I_0 \frac{e^s - 1}{s} \right], \\ i(s) &= C \left[e^s e(s) - E_0 \frac{e^s - 1}{s} \right] + \\ &+ D \left[e^s i(s) - I_0 \frac{e^s - 1}{s} \right] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} e(s) (A e^s - 1) + i(s) B e^s &= \\ &= (A E_0 + B I_0) \frac{e^s - 1}{s}, \\ e(s) C e^s + i(s) (D e^s - 1) &= \\ &= (C E_0 + D I_0) \frac{e^s - 1}{s}. \end{aligned} \quad (5)$$

Dies ist ein System von linearen algebraischen Gleichungen für die Unbekannten $e(s), i(s)$ mit der Determinante

² Da für I_n alle Operationen in derselben Weise verlaufen, führen wir immer nur die für E_n an.

³ Siehe [6], S. 19 und [7], S. 44.

$$(A e^s - 1)(D e^s - 1) - B C e^{2s} = \\ = (AD - BC) e^{2s} - (A + D) e^s + 1.$$

Von jetzt an setzen wir in diesem Abschnitt voraus, daß der Vierpol *passiv* ist, d. h. daß

$$AD - BC = \det \mathbf{M} = d$$

den Wert eins hat. Führt man die Bezeichnung

$$z^2 - (A + D)z + 1 = p(z)$$

ein, so ist die Determinante des Systems (5) gleich $p(e^s)$. Durch Auflösung von Gl. (5) ergibt sich

$$e(s) = \frac{e^s - 1}{s} \frac{E_0(e^s - A) - I_0 B}{p(e^s)}, \\ i(s) = \frac{e^s - 1}{s} \frac{-E_0 C + I_0(e^s - D)}{p(e^s)}, \quad (6)$$

wobei $d = 1$ berücksichtigt wurde. Zu diesen Bildfunktionen sind nun die Originalfunktionen zu bestimmen.

Die rechten Seiten von Gl. (6) sind Aggregate aus Termen der Gestalt

$$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^{ks}}{p(e^s)} \quad (k = 0, 1).$$

Deren Originalfunktionen erhält man auf folgende Weise⁴: Zu der gebrochen rationalen Funktion $1/p(s) = q(s)$ gehöre die Originalfunktion $Q(t)$:

$$\frac{1}{p(s)} \bullet \circ Q(t). \quad (7)$$

Dann ist⁵

$$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^{ks}}{p(e^s)} \bullet \circ Q([t] + k)(0).$$

(Die rechte Seite ist die Ableitung von Q der Ordnung $[t] + k$, genommen an der Stelle 0.)

Ehe wir die Originalfunktionen zu Gl. (6) anschreiben, beachten wir, daß $E(t)$, $I(t)$ und $Q([t] + k)(0)$ in den Intervallen $n \leq t < n + 1$ konstant sind, nämlich gleich E_n , I_n und $Q^{(n+k)}(0)$. Daher können wir von den Funktionen gleich zu den Folgen übergehen und erhalten

$$E_n = E_0[Q^{(n+1)}(0) - A Q^{(n)}(0)] - I_0 B Q^{(n)}(0), \\ I_n = -E_0 C Q^{(n)}(0) + I_0[Q^{(n+1)}(0) - D Q^{(n)}(0)]. \quad (8)$$

Die Berechnung von $Q(t)$ hat, wie aus der Anwendung der Laplace-Transformation auf Differentialgleichungen wohlbekannt ist, darauf Rücksicht zu nehmen, ob die Nullstellen α_1, α_2 von $p(s)$,

$$\alpha_{1,2} = \frac{A + D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1},$$

verschieden oder gleich ausfallen⁶, d. h. ob

$$(A + D)^2/4 \neq 1 \quad \text{oder} \quad = 1$$

ist.

⁴ Siehe [7], S. 131, Formel (16).

⁵ $[t]$ ist die größte in t enthaltene ganze Zahl, z. B. $[3,75] = 3$.

⁶ Im Fall $d = 1$ ist $p(z) = 0$ identisch mit der charakteristischen Gleichung der Matrix, so daß α_1, α_2 mit den oben durch λ_1, λ_2 bezeichneten Eigenwerten der Matrix übereinstimmen.

I. $\alpha_1 \neq \alpha_2$, d. h. $(A + D)/2 \neq \pm 1$

Im Fall $\alpha_1 \neq \alpha_2$ gilt die Partialbruchzerlegung⁷

$$q(s) = \frac{1}{p(s)} = \sum_{v=1}^2 \frac{1}{p'(\alpha_v)} \frac{1}{s - \alpha_v},$$

aus der sich ergibt:

$$Q(t) = \sum_{v=1}^2 \frac{e^{\alpha_v t}}{p'(\alpha_v)}, \\ Q^{(r)}(t) = \sum_{v=1}^2 \frac{\alpha_v^r}{p'(\alpha_v)} e^{\alpha_v t}, \\ Q^{(r)}(0) = \sum_{v=1}^2 \frac{\alpha_v^r}{p'(\alpha_v)}.$$

Da die Koeffizienten von $p(s)$ gleich $-(A + D)$ und 1 sind, muß

$$\alpha_1 + \alpha_2 = A + D, \quad \alpha_1 \alpha_2 = 1$$

sein. Die letztere Beziehung legt es nahe, $\alpha_1 = e^\tau$ und $\alpha_2 = e^{-\tau}$ zu setzen. Dann muß $A + D = e^\tau + e^{-\tau}$ sein, so daß sich τ aus

$$\cosh \tau = \frac{A + D}{2} \quad (9)$$

bestimmt. Damit wird

$$p'(s) = 2s - (A + D) = 2(s - \cosh \tau), \\ p'(\alpha_1) = 2(e^\tau - \cosh \tau) = 2 \sinh \tau, \\ p'(\alpha_2) = 2(e^{-\tau} - \cosh \tau) = -2 \sinh \tau,$$

also⁸

$$Q^{(r)}(0) = \frac{e^{r\tau} - e^{-r\tau}}{2 \sinh \tau} = \frac{\sinh r \tau}{\sinh \tau}.$$

Die explizite Gestalt von Gl. (8) lautet daher

$$E_n = \frac{1}{\sinh \tau} \cdot \\ \cdot \{E_0 [\sinh(n + 1)\tau - A \sinh n \tau] - I_0 B \sinh n \tau\}, \\ I_n = \frac{1}{\sinh \tau} \cdot \\ \cdot \{-E_0 C \sinh n \tau + I_0 [\sinh(n + 1)\tau - D \sinh n \tau]\}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich auf Grund des Additionstheorems der Funktion \sinh und der Formel (9) auf eine einfachere Gestalt bringen. Wegen

$$\sinh(n + 1)\tau - A \sinh n \tau = \\ = \sinh n \tau \cosh \tau + \cosh n \tau \sinh \tau - A \sinh n \tau = \\ = -\frac{A - D}{2} \sinh n \tau + \cosh n \tau \sinh \tau,$$

$$\sinh(n + 1)\tau - D \sinh n \tau = \\ = \sinh n \tau \cosh \tau + \cosh n \tau \sinh \tau - D \sinh n \tau = \\ = \frac{A - D}{2} \sinh n \tau + \cosh n \tau \sinh \tau$$

ergibt sich

⁷ Siehe [6], S. 37 und [7], S. 75.

⁸ Für die ausgeschlossenen Werte $(A + D)/2 = \pm 1$ wäre $\tau \equiv 0$ bzw. $\equiv \pi i \pmod{2\pi i}$, also $\sinh \tau = 0$ und $Q^{(r)}(0)$ sinnlos.

$$\begin{aligned} E_n &= E_0 \left(-\frac{A-D}{2} \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} + \cosh n \tau \right) - I_0 B \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau}, \\ I_n &= -E_0 C \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} + I_0 \left(\frac{A-D}{2} \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} + \cosh n \tau \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Durch diese Transformation gehen E_0, I_0 in E_n, I_n über, ihre Matrix ist folglich die zu M^n inverse Matrix M^{-n} . Man erhält also⁹

$$M^{-n} = \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} \begin{pmatrix} -\frac{A-D}{2} & -B \\ -C & \frac{A-D}{2} \end{pmatrix} + \cosh n \tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Um M^n zu bekommen, braucht man die Transformation (10) nur umzukehren:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_n \left(\frac{A-D}{2} \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} + \cosh n \tau \right) + I_n \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau}, \\ I_0 &= E_n C \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} + I_n \left(-\frac{A-D}{2} \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} + \cosh n \tau \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Das ergibt¹⁰:

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} \begin{pmatrix} \frac{A-D}{2} & B \\ C & -\frac{A-D}{2} \end{pmatrix} + \cosh n \tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (AD - BC &= 1, \quad \cosh \tau = (A + D)/2 \pm 1). \end{aligned} \quad (13)$$

Damit ist M^n in einer für die praktische Berechnung besonders einfachen Form dargestellt, da die Funktionen \sinh und \cosh auch für komplexe Argumente tabelliert sind.

Wie eingangs bemerkt, muß M^n eine ganze rationale Funktion von A, \dots, D sein. In der Tat kann man die hyperbolischen Funktionen sofort durch Polynome ersetzen und zwar durch die wohl-bekannten Tschebyscheffschen, die durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

definiert sind, was allerdings mehr vom theoretischen als vom praktischen Standpunkt aus interessant ist. Nach Gl. (9) ist mit $(A + D)/2 = x$

$$x = \cosh \tau = \cosh i \tau, \quad i \tau = \arccos x, \quad \cosh n \tau = \cosh i n \tau = \cos(n \arccos x) = T_n(x),$$

$$\frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} = \frac{e^{n\tau} - e^{-n\tau}}{e^\tau - e^{-\tau}} = \frac{(e^{n\tau} - e^{-n\tau})(e^\tau - e^{-\tau})}{(e^\tau - e^{-\tau})^2} = \frac{\cosh(n+1)\tau - \cosh(n-1)\tau}{\cosh 2\tau - 1} = \frac{T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)}{T_2(x) - 1},$$

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Man kann somit M^n in die Form bringen:

$$M^n = \frac{T_{n+1}\left(\frac{A+D}{2}\right) - T_{n-1}\left(\frac{A+D}{2}\right)}{2\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \begin{pmatrix} \frac{A-D}{2} & B \\ C & -\frac{A-D}{2} \end{pmatrix} + T_n\left(\frac{A+D}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Der erste Faktor rechts ist nur scheinbar eine gebrochen rationale Funktion, weil der Zähler durch den Nenner teilbar ist. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sinh n \tau}{\sinh \tau} &= \frac{e^{n\tau} - e^{-n\tau}}{e^\tau - e^{-\tau}} = e^{(n-1)\tau} + e^{(n-3)\tau} + \dots + e^{-(n-3)\tau} + e^{-(n-1)\tau} = \\ &= \begin{cases} 2[\cosh(n-1)\tau + \cosh(n-3)\tau + \dots + \cosh 3\tau + \cosh \tau] & \text{für gerades } n \\ 2[\cosh(n-1)\tau + \cosh(n-3)\tau + \dots + \cosh 4\tau + \cosh 2\tau] + 1 & \text{für ungerades } n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2[T_{n-1}(x) + T_{n-3}(x) + \dots + T_3(x) + T_1(x)] & \text{für gerades } n \\ 2[T_{n-1}(x) + T_{n-3}(x) + \dots + T_4(x) + T_2(x)] + 1 & \text{für ungerades } n, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $x = (A + D)/2$ zu setzen ist.

⁹ Eine Matrix wird mit einer Zahl multipliziert, indem jedes Element mit der Zahl multipliziert wird; zwei Matrizen werden addiert, indem gleichstellige Elemente addiert werden.

¹⁰ Man kann verifizieren, daß Gl. (11) aus Gl. (13) durch Ersatz von n durch $-n$ hervorgeht.

Verwendet man die weniger gebräuchlichen Tschebyscheffschen Polynome zweiter Art, die durch $U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}$ definiert sind, so kann man den Faktor $\sinh n\tau/\sinh \tau$ der ersten Matrix in Gl. (13) kürzer durch $U_{n-1}(x) = U_{1-n}\left(\frac{A+D}{2}\right)$ ausdrücken.

Der Fall des symmetrischen Vierpols

Wenn der passive Vierpol symmetrisch ist, d. h. wenn Ein- und Ausgang ohne Änderung der Wirkungsweise vertauscht werden können, so ist $A = D$. Die Voraussetzung $(A+D)/2 \neq \pm 1$ bedeutet dann $A \neq \pm 1$. Die Formeln (13) und (14) nehmen in diesem Fall die einfache Gestalt an¹¹:

$$M^n = \begin{pmatrix} \cosh n\tau & B \frac{\sinh n\tau}{\sinh \tau} \\ C \frac{\sinh n\tau}{\sinh \tau} & \cosh n\tau \end{pmatrix} \quad (AD - BC = 1, \quad \cosh \tau = A = D \neq \pm 1), \quad (15)$$

$$M^n = \begin{pmatrix} T_n(A) & B \frac{T_{n+1}(A) - T_{n-1}(A)}{2A^2 - 1} \\ C \frac{T_{n+1}(A) - T_{n-1}(A)}{2A^2 - 1} & T_n(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_n(A) & BU_{n-1}(A) \\ CU_{n-1}(A) & T_n(A) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

II. $\alpha_1 = \alpha_2$, d. h. $(A+D)/2 = \pm 1$

In diesem Fall ist $\alpha_1 = \alpha_2 (= \alpha) = \frac{A+D}{2} = \pm 1$,

also $p(s) = (s - \alpha)^2$, $q(s) = \frac{f_1}{(s - \alpha)^2}$;

$$Q(t) = te^{\alpha t}, \quad Q^{(r)}(t) = t\alpha^r e^{\alpha t} + r\alpha^{r-1}e^{\alpha t}, \quad Q^{(r)}(0) = r\alpha^{r-1}.$$

Damit nimmt Formel (8) die Gestalt

$$E_n = E_0[(n+1)\alpha^n - A n\alpha^{n-1}] - I_0 B n\alpha^{n-1}, \quad I_n = -E_0 C n\alpha^{n-1} + I_0[(n+1)\alpha^n - D n\alpha^{n-1}]$$

an, woraus sich durch Umkehrung

$$E_0 = E_n[(n+1)\alpha^n - D n\alpha^{n-1}] + I_n B n\alpha^{n-1}, \quad I_0 = E_n C n\alpha^{n-1} + I_n[(n+1)\alpha^n - A n\alpha^{n-1}]$$

ergibt. Berücksichtigt man, daß $(A+D)/2 = \alpha$, also

$$\alpha - D = \frac{A-D}{2}, \quad \alpha - A = -\frac{A-D}{2}$$

ist, so erhält man

$$M^n = n\alpha^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{A-D}{2} & B \\ C & -\frac{A-D}{2} \end{pmatrix} + \alpha^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (AD - BC = 1, \quad (A+D)/2 = \alpha = \pm 1). \quad (17)$$

Ist der Vierpol symmetrisch, d. h. $A = D = \alpha = \pm 1$, so ist $\alpha^{-1} = \alpha$

$$M^n = \alpha^n \begin{pmatrix} 1 & B n\alpha \\ C n\alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

In diesem Fall folgt aus $A^2 - BC = 1$, $A = \pm 1$, daß $BC = 0$, also B oder/und $C = 0$ ist.

3. Der Fall beliebiger $\det M \neq 0$

Wenn $\det M = d \neq 0$ ist, so formen wir die Differenzengleichungen so um:

$$d^{n/2} E_n = d^{-1/2} A d^{(n+1)/2} E_{n+1} + d^{-1/2} B d^{(n+1)/2} I_{n+1}, \quad d^{n/2} I_n = d^{-1/2} C d^{(n+1)/2} E_{n+1} + d^{-1/2} D d^{(n+1)/2} I_{n+1}.$$

Setzt man $d^{-1/2} A = A', \dots, d^{-1/2} D = D', \quad d^{n/2} E_n = E'_n, \quad d^{n/2} I_n = I'_n$,

so gilt $E'_n = A' E'_{n+1} + B' I'_{n+1}, \quad I'_n = C' E'_{n+1} + D' I'_{n+1}$

mit $A' D' - B' C' = d^{-1} (AD - BC) = 1$.

¹¹ Die Formel (16) stimmt mit der von DOLEŽAL [1] in Satz 12, S. 314, angegebenen Formel überein, wenn man die dort verwendete Funktion K_n nach Formel (14), S. 300, durch die T_n ausdrückt.

Wenn
$$\left(\frac{A' + D'}{2}\right)^2 \neq 1, \text{ d. h. } \left(\frac{A + D}{2}\right)^2 \neq d$$

ist, so ist mit

$$\cosh \tau' = \frac{A' + D'}{2} = \frac{A + D}{2} d^{-1/2} \quad (19)$$

nach Formel (12)

$$\begin{pmatrix} E'_0 \\ I'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A' - D'}{2} \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} + \cosh n \tau' & B' \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} \\ C' \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} & -\frac{A' - D'}{2} \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} + \cosh n \tau' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E'_n \\ I'_n \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1/2} \frac{A - D}{2} \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} + \cosh n \tau' & d^{-1/2} B \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} \\ d^{-1/2} C \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} & -d^{-1/2} \frac{A - D}{2} \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} + \cosh n \tau' \end{pmatrix} \cdot d^{n/2} \begin{pmatrix} E_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

Hieran liest man ab:

$$M^n = d^{(n-1)/2} \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} \begin{pmatrix} \frac{A - D}{2} & B \\ C & -\frac{A - D}{2} \end{pmatrix} + d^{n/2} \cosh n \tau' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Die Größe $d^{1/2}$, die in $\cosh \tau'$ und M^n auftritt, ist doppeldeutig. Man kann sich aber davon überzeugen, daß M^n sich nicht ändert, wenn man $d^{1/2}$ durch $-d^{1/2}$ ersetzt.

Der symmetrische Vierpol

Wenn $A = D$ ist, so vereinfacht sich die Formel (20) zu

$$M^n = d^{n/2} \begin{pmatrix} \cosh n \tau' & B d^{-1/2} \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} \\ C d^{-1/2} \frac{\sinh n \tau'}{\sinh \tau'} & \cosh n \tau' \end{pmatrix}.$$

In den Formeln (20) und (21) kann man wie im Fall $d = 1$ die hyperbolischen Funktionen durch die Tschebyscheffschen Polynome ersetzen.

Wenn

$$\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 = d$$

ist, führt man wie oben die gestrichenen Größen ein und geht auf die Formeln (17) und (18) zurück.

4. Der Fall verschwindender Determinante

Wenn $\det M = 0$ ist, was bei Vierpolen vorkommen kann, muß mindestens eine der vier Größen A, \dots, D von Null verschieden sein. Es sei z. B. $A \neq 0$. Setzt man $C = \lambda A$, so folgt aus $AD = BC$, daß $D = \lambda B$ ist. Damit ergibt sich

$$I_n = C E_{n+1} + D I_{n+1} = \lambda (A E_{n+1} + B I_{n+1}) = \lambda E_n,$$

also auch $I_{n+1} = \lambda E_{n+1}$, und folglich

$$E_n = A E_{n+1} + B I_{n+1} = (A + B \lambda) E_{n+1} = (A + D) E_{n+1},$$

$$I_n = \lambda E_n = \lambda (A + D) E_{n+1} = (A + D) I_{n+1}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar

$$E_0 = (A + D)^n E_n,$$

$$I_0 = (A + D)^n I_n,$$

also

$$M^n = (A + D)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Methode der Differenzengleichungen sich auch zur Potenzierung von Matrizen höherer Reihenzahl als zwei verwenden läßt.

Schrifttum

- [1] DOLEŽAL, V., Beitrag zur Ermittlung der Eigenschaften von Ketten gleicher allgemeiner Vierpole. Acta Technica (Prag) [1958], Nr. 4, 294–321.
- [2] PEASE, M. C., The iterated network and its application to differentiators. Proc. Inst. Radio Engrs. **40** [1952], Nr. 6.
- [3] GRÖBNER, W., Über die Berechnung von Matrixpotenzen. MTW-Mitteilungen (Wien) **5** [1958], 153–157.
- [4] ZYPKIN, J. S., Differenzengleichungen der Impuls- und Regeltechnik. Verlag Technik, Berlin 1956, S. 11–62.
- [5] TRUXAL, J. G., Entwurf automatischer Regelsysteme. R. Oldenbourg Verlag, Wien und München 1960, S. 537–545.
- [6] DOETSCH, G., Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. R. Oldenbourg Verlag, München 1956.
- [7] DOETSCH, G., Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1958.

Aktive Hochfrequenzspektrometer für ionosphärische Echolotung^{*}

I. Direktregistrierung ionosphärischer Charakteristiken

Von KLAUS BIBL

Ionosphären-Institut Breisach im Fernmeldetechnischen Zentralamt der Deutschen Bundespost

(A.E.Ü. 14 [1960], 341 — 347; eingegangen am 18. Juni 1960)

DK 551.508.96

Aus den üblichen Impuls-Echolotungsgeräten für die Ionosphärenforschung heraus wurde eine Ionosonde entwickelt, die die Vorteile der schnellen (amerikanischen) Ionosonde — nämlich hohe Bildfolge, unbehindert von mechanisch gesetzten Grenzen — und der langsamen (englisch-deutschen) Ionosonde — Abstimmbarkeit von Empfangs- und Sendekreisen im großen Frequenzbereich — vereinigt. Die Anwendbarkeit des Geräteprinzips ist nicht auf die Ionosphärenforschung beschränkt.

Durch Zusatzregistrierungen gelang es, aus der Ionosonde ein echtes aktives HF-Spektrometer zu machen. Dabei wird die Zeit als natürliche Variable in den Registrierungen der ionosphärischen Charakteristiken wieder eingeführt. Wir kennen zwei grundsätzliche Möglichkeiten: Die Registrierung der scheinbaren Höhen in Abhängigkeit von der Zeit, wobei sich die Minimalhöhen der Ionosphärenschichten deutlich herauszeichnen. Da aber manche Frequenzen wegen der immer vorhandenen Störsender ausfallen, ergeben sich automatisch auch Kurven konstanter Plasmafrequenz, d. h. konstanter Elektronendichte. Andererseits können durch Ausblendung oder Rasterung von Höhenbereichen die minimalen und kritischen Frequenzen in der E-Region und — mit Einschränkungen — auch in der F-Region als Funktionen der Zeit geschrieben werden.

Zwischen den Höhenregistrierungen als Funktionen der Zeit mit der Frequenz als Parameter und den Frequenzregistrierungen als Funktionen der Zeit für verschiedene Höhenbereiche liegt die Direktregistrierung der F-3000-MUF, der „maximum usable frequency“. Sie kann physikalisch als ausgezeichnetes Maß für die Profilform der F₂-Ionisation verwendet werden. Die vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten der Direkt-Registrierungen ionosphärischer Charakteristiken werden diskutiert. Dabei wird vor allem hingewiesen auf die Vergleichsmöglichkeit mit Registrierungen anderer geophysikalischer Meßgrößen, die schon immer in Zeitabhängigkeit geschrieben werden.

Developing the normally used sounding-equipments for ionospheric research an Ionosonde has been constructed; it contains the advantages of the fast (American) Ionosonde — i.e. the high speed of record sequence without mechanical limitations — and those of the slow (English-German) Ionosonde — i.e. the possibility of tuned circuits in transmitter and receiver within a wide frequency range. The use of the principle of the device is not confined to the ionospheric research.

By using supplementary recorders it was possible to transform the Ionosonde into a real „active HF-Spectrometer“. Herein the time as a natural variable is introduced again in the records of the ionospheric characteristics. There are two fundamental possibilities: the record of the virtual heights in time dependence, where the minimum heights of the ionospheric layers are clearly visible. Because of the fact of missing some frequencies due to interference with the continuous presence of strong transmitters also curves of constant plasma frequencies (i.e. constant electron densities) are written. On the other hand the minimum and critical frequencies in the E-region and — with some restrictions — also in the F-region can be written as functions of time by gates in the height ranges.

Combining the records of heights as a function of time, with the frequency as a parameter, and the frequency records as function of time for different ranges in height, the direct record of the F-3000-MUF, the „maximum usable frequency“ can be written. The MUF can be used physically as an excellent measure for the profile form of the F₂-ionization. The universal use of the directly recorded ionospheric characteristics is discussed. Thereby the possibility is mentioned of comparison with the record of other geophysical measures, which are always written in time dependence.

1. Einleitung

Fast zu Beginn der Ionosphärenforschung wurde die Impulsschichtmethode eingeführt; sie gestattet es, die Laufzeit von Hochfrequenzimpulsen, die an den Ionosphärenschichten reflektiert werden, direkt als Maß für die Schichthöhe zu verwenden. Man erhält allerdings nur „scheinbare Höhen“, da die ausgesandten Impulse in den ionisierten Schichten vor und nach der Reflexion verzögert werden, weil im

Plasma die Gruppengeschwindigkeit geringer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Strahlt der Impulssender auf fester Trägerfrequenz, so erhält man Echosignale von einer bestimmten Ionosphärenschicht. Sendet man etwa bei Tag auf 3 MHz, dann werden die Wellenzüge in der E-Schicht reflektiert. Verringert sich nun die Ionisation am Abend, so dringt die Welle immer tiefer in die Schicht ein, die scheinbare Höhe vergrößert sich. Sinkt die maximale Elektronendichte in der E-Region unter einen Wert $N = 1,24 \cdot f_c^2 \cdot 10^{10}$ Elektronen/m³, wobei hier $f_c = 3$ MHz die kritische Frequenz bedeuten soll, dann durchdringt die Welle

^{*} Die Entwicklung der beschriebenen Technik und der Geräte wurde durch eine Forschungsbeihilfe des Bundesministeriums für Wirtschaft, Nr. A 190, ermöglicht.

die E-Schicht und wird erst an der F-Schicht reflektiert. Auch diese Echosignale erleiden eine beträchtliche Verzögerung in der E-Schicht.

Solche Registrierungen der scheinbaren Höhen als Funktion der Zeit auf fester Frequenz wurden sehr bald abgelöst durch die Registrierung der scheinbaren Höhe h' als Funktion der stetig variierten Frequenz f . Da die Frequenz direkt ein Maß für die Elektronenkonzentration an der Reflexionsstelle ist, kann man dieses Verfahren mit Recht als „Ausloten“ der Ionosphäre bezeichnen. Wählt man einen Frequenzbereich von 1 bis 20 MHz, den ein Impulssender stetig überstreicht, und läßt man einen Empfänger — auf die jeweilige Trägerfrequenz abgestimmt — mitlaufen, dann erhält man Ionogramme ($h'f$ -Registrierungen). Daraus kann — mit gewissen Einschränkungen, siehe die Teile IV und V dieser Veröffentlichung — durch eine komplizierte Transformation die Elektronendichte als Funktion der Höhe, das Elektronendichte-Profil, ermittelt werden. Scheinbar erhält man — bei guter Qualität der Ionogramme und nach Umrechnung mit Hilfe von Rechenautomaten — sehr glatte Profile; es besteht dann die Gefahr, daß die in den $h't$ -Registrierungen auf fester Frequenz sichtbaren Schwankungen völlig übersehen oder als „scheinbar“ (hervorgerufen durch die veränderlichen Verzögerungen) abgetan werden.

2. Die Ionosonde

Um das Verhalten der Ionosphäre zu studieren, schien es früher ausreichend, an jeder Station stündlich ein Ionogramm aufzunehmen. Die anfangs recht lange „Durchdrehzeit“ für das Überstreichen des großen Frequenzbereiches machte den Stundenabstand auch notwendig. Außerdem ist die Qualität der Ionogramme nur einwandfrei bei Aufnahmezeiten von 5 min und mehr. Dies gilt zumindest für den europäischen Raum, der stark mit Rundfunk-, Amateur- und kommerziellen Sendern belegt ist. Zuerst wurde in Amerika, wo es noch relativ störungsarme Gegenden gab, die Aufnahmezeit drastisch verringert. SULZER [1] verzichtete auf die Abstimmung von Sender- und Empfängerkreisen, wählte eine hohe Zwischenfrequenz (30 MHz) und kam mit einem einzigen Abstimmkreis aus, der den für Sender und Empfänger gemeinsamen Oszillator von 31 bis 50 MHz variiert. Unabhängig von der amerikanischen Realisierung kam der Verfasser zu einer Lösung, bei der die Abstimmung der Sende- und Empfangskreise beibehalten wurde. Doch konnten die mechanischen Schwierigkeiten vermieden werden, die bei der Bereichumschaltung durch Spulenwechsel entstehen.

Zuerst [2] wurde ein Gerät entwickelt, das die Frequenzen von 1 bis 16 MHz in zwei Bereichen überstreicht, die durch Kohle-Schleifkontakte auf einem Messingkollektor umgeschaltet werden. Bei der jetzt verwendeten Lösung wird die Frequenz von 1 bis 20 MHz in drei Bereichen variiert. Die Kontakte, als Kohleschleifer auf Silber ausgebildet, ermöglichen einen wirklichen Dauerbetrieb ohne

Wartung. Weil die Spulen — fest an den Rotorplatten montiert — mitrotieren, wird die Kreisgüte durch die Kontakte nicht beeinflusst. Dadurch ist das Kontaktrauschen auch für den Empfangskreis unwesentlich. Der Vorteil gegenüber der SULZERschen Lösung, wenigstens je einen abgestimmten Kreis für Sendung und für Empfang zu haben, liegt auf der Hand.

3. Panorama-Filme

Diese Ionosonde ist nun in der Lage, pausenlos Ionogramme aufzunehmen ohne mechanische Beschränkung der Aufnahmezeit. Deshalb können Spielfilme angefertigt werden, die je nach der Zeitraffung verschiedene Erscheinungen stärker hervorheben. Bei einer Aufnahmefolge von 5 Bildern je Minute (Zeitraffung 1:300) wird der Durchgang von raschen Störungen gut sichtbar [3], bei 2 Bildern je Minute (Zeitraffung von 1:750) können die Schwankungen der Es- und F-Ionisation sichtbar gemacht werden.

Die Betrachtung dieser „Panorama“-Filme ist eine große Hilfe bei der Interpretation der normalen Ionogramme, da nun die Zeit wieder als natürliche Variable erscheint. Dadurch gelingt es, sich ein Bild vom Verlauf der typischen Störungen und Schwankungen zu machen und — besonders für die normale E- und F-Schicht — zu Meßwerten zu gelangen, bei denen der Einfluß der Störungen und Schwankungen eliminiert ist.

Doch hat es sich als schwierig herausgestellt, den Verlauf der Störungen selbst in den Panorama-Filmen zu verfolgen [4]. Deshalb hat der Verfasser versucht, die Zeitraffung noch weiter zu treiben, wobei die von NAKATA, KAN und UYEDA [5] entwickelte Methode der Charakteristiken-Registrierung verwendet und weiterentwickelt wurde.

4. Allgemeines über Charakteristiken-Registrierungen

Der Verzicht auf die Zeit als Variable in den allgemein üblichen Ionogrammen ist für manche Anwendung gefährlich. Doch zwingt die Registriertechnik normalerweise zu einer Beschränkung auf zwei Variable. Im vorliegenden Fall interessieren aber mindestens drei, nämlich die Elektronendichteverteilung in Abhängigkeit von der Höhe und der Zeit. Weiter kann nicht darauf verzichtet werden, die Amplitude der reflektierten Zeichen als Grauton in den Filmregistrierungen auszudrücken, um Abstand gegenüber den Störungen zu gewinnen und die verschiedenen Echos zu unterscheiden (siehe Teil II). Gewöhnlich benutzt man den Ausweg, eine Variable zum Parameter zu machen. Im Gegensatz zur bisherigen Übung schien es uns dabei zweckmäßig, die Zeit als natürliche Variable zu erhalten und den Film stetig und zeitproportional zu transportieren. So sind nun zwei Typen von Registrierungen denkbar:

1. Die Zeitabhängigkeit der Höhenkurven $h'(t; f_N)$, bei der die Plasmafrequenz f_N als Parameter erscheint.

2. Die Zeitabhängigkeit der kritischen Frequenz $f_N(t; h')$, bei der verschiedene Höhenbereiche h' aufgeblendet oder anderweitig kenntlich gemacht werden.

In beiden Fällen soll die Zeit als Variable auftreten und die Meßgenauigkeit bei 1 min liegen.

5. Höhen-Registrierungen: $h'(t; f_N)$

Am einfachsten lassen sich die $h'(t; f_N)$ -Registrierungen realisieren. Wenn man eine für normale Ionogramme bestimmte Registrierung benutzen will, ist es nur notwendig, den Filmtransport wesentlich zu verlangsamen. So wird der frequenzproportionale Filmtransport praktisch unterdrückt, und das Ionogramm schrumpft zu einem Strich zusammen. Bei dem langsamen Filmtransport werden die ununterbrochen aufgenommenen Ionogramme so eng nebeneinandergesetzt, daß sie nicht mehr zu trennen sind. Bei richtiger Helligkeitseinstellung entstehen kontinuierliche Kurvenzüge für scheinbare Höhen, bei denen die Echos stark werden oder lange, d. h. in einem größeren Frequenzbereich, verweilen. Dies ist in erster Linie der Fall bei den Minimalhöhen; sie erscheinen besonders deutlich.

Man erhält also je einen Kurvenzug für h'_E, h'_{ES} und die Minimalhöhe aller Zwischenschichten: h'_I ; außerdem h'_F und — falls vorhanden — h'_{F_2} . Um deutliche Registrierungen zu erhalten, kann man das Empfangsgut differenzieren (siehe Teil II). Durch dieses Verfahren, das der Verfasser nicht zweckmäßig für die normalen Ionogramme hält, wird hier eine Art zusätzlichen Rasters eingeführt.

In Frequenzbändern mit starker Störsenderbelegung fallen nämlich durch das Differenzieren die Echos fast oder vollständig aus. Dadurch werden, außer den eben erwähnten Minimalhöhen, noch Kurven von h' für gewisse feste Plasmafrequenzen f_N , d. h. für konstante Elektronendichte, geschrieben. So entsteht durch die Senderbelegung ein Raster mit reproduzierbaren f_N -Werten; f_N wird also zum Parameter. Die Bilder 1b und 2b sind Beispiele einer $h'(t; f_N)$ -Registrierung.

6. Kritische Frequenzen im E-Niveau als Zeitfunktion: $f_N(t; E)$

Für die Frequenzregistrierungen ist kein natürliches Raster vorhanden. Eine einfache und ziemlich eindeutige Registrierung ergibt sich aber, wenn man den Höhenbereich der E-Ionisation mit h' -Werten von 90 bis 160 km durch Hellsteuerung aufblendet.

Dann zeichnen sich f_E^o, f_E^x und f_{ES} als obere Begrenzung von Echobereichen ab; meist lassen sich sogar f_E^o und f_{ES}^x trennen. Denn im Bereich, in dem nur das x-Echo auftritt, wird ein anderer Grauwert erhalten als im Bereich des meist stärkeren o-Echos; das ist ein Folge der für beide Komponenten unterschiedlichen Absorption.

Außerdem erhält man f_E^{\min} als Untergrenze der geschwärzten Flächen. Der geschwärzte Bereich kann also durch die Formel $f_E^{\min}(t) < f(t) \leq f_N(t)$ beschrieben werden. Ein Registrierbeispiel ist in den Bildern 1c und 2c gegeben.

Die Schaltung zur Helltastung des Höhenbereichs von 90 bis 160 km wird in Bild 3 gezeigt; in diesem

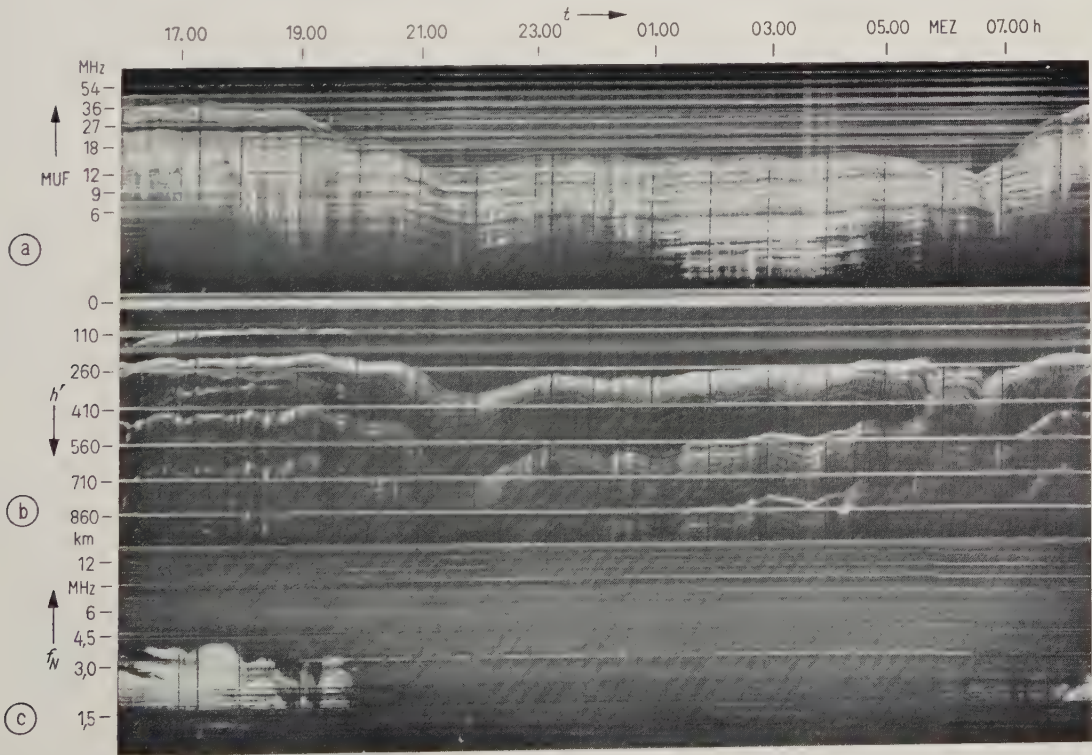


Bild 1. Charakteristiken-Registrierungen vom 13./14. Februar 1959; (a) $MUF(t; F)$, (b) $h'(t; f_N)$, (c) $f_N(t; E)$. Langsame Schwingungen. Muster in MUF und h' zeigen gleichmäßige Ionisation; am Morgen Überschneidungen wegen horizontaler Inhomogenitäten.

das der $f_N(t; E)$ -Registrierung. Aus diesem Grunde wird vom Verfasser eine künstliche Höhenraasterung benutzt. Das Höhenintervall wurde in 25 km breite hellgetastete Teilbereiche unterteilt, die durch 25 km breite Lücken getrennt sind; jeder Teilbereich schreibt, wenn Echos in ihm liegen, in einer bestimmten Farbe. So entstehen auf einem Farbfilm je nach den Höhenbereichen verschiedenfarbige Kurvenzüge übereinander.

Leider sind in den handelsüblichen Farbfilmen nur drei Farbstoffe enthalten, so daß mit den im besten Fall möglichen zwei Mischfarben nur fünf Bereiche ausgezeichnet werden können, also ein Höhenbereich von 250 km. Durch eine automatische Umschaltung des ausgewählten Bereiches wäre es möglich, den mindestens erforderlichen Gesamtbereich von 450 km (250—700 km scheinbare Höhe) aufzunehmen.

Die Zusammenfassung der je nach Höhe verschiedenfarbigen Echobereiche auf einem Registrierstreifen wird mit einem Prisma erreicht. Die Registrierung zeigt dann in der Ordinate die Frequenz als Variable, die Höhenbereiche jedoch als Farbe. Es entstehen verschiedenfarbige Bänder, deren obere und untere Frequenzgrenzen dadurch bestimmt sind, daß die Reflexion sich im ausgezeichneten Höhenbereich befindet. Die kritische Frequenz kann durch den oberen Rand der jeweils höchsten Frequenzbänder approximiert werden. Zur exakten Bestimmung wäre definitionsgemäß eine Extrapolation auf sehr große Höhe erforderlich. Dabei ergeben sich aber Schwierigkeiten durch die Lücken und die mit wachsender scheinbarer Höhe verringerten Echointensitäten. Über andere Ansätze zur Lösung dieses Problems wird im Teil II berichtet, weitere Anwendungen der Farbregistrierung sollen getrennt beschrieben werden.

8. Die Schichtform im F-Niveau (MUF)

Um außer den Minimalhöhen und den kritischen Frequenzen noch einen Meßwert zu gewinnen, der über die Schichtform aussagen kann, wurde die sogenannte F-3000-MUF (maximal brauchbare Frequenz für eine Fernübertragung von 3000 km) zur kontinuierlichen Registrierung herangezogen. Der Verfasser hat in früheren Arbeiten gezeigt [6], daß die F-Ionisation in einer typischen Weise schwankt: Eine Erhöhung der kritischen Frequenz geht immer mit einer „Kompression der Schicht nach unten“ (Abnahme der unteren Halbdicke trotz Absinkens der Schichtunterkante) einher. Deshalb ist die F-3000-MUF das bestmögliche eindimensionale Maß für die Schichtform; sie ist bei niedrig gelegenen, stark ionisierten Schichten besonders

groß und bei hohen Schichten, deren maximale Elektronenkonzentration gering ist, sehr klein. Die relativen Änderungen der MUF sind also wesentlich größer als die von $f_{F_2}^0$.

Die Realisierung einer Direktregistrierung der MUF ist gar nicht schwierig. Der Verfasser hat das Prinzip schon vor längerer Zeit veröffentlicht [7]. Die MUF wird üblicherweise erhalten durch Anlegen einer Schar von „Übertragungskurven“ an das Ionogramm. Sie ist definiert als Parameter der Kurve, die den Echozug gerade tangiert. Die Form der Übertragungskurven ist im logarithmischen Frequenzmaßstab gleich (sie gehen durch Verschiebung auseinander hervor). Dies ist durch die Geometrie der Ausbreitung von Strahlen in einer brechenden Ionosphäre bedingt; die maximal mögliche Übertragungsfrequenz ist proportional der kritischen Frequenz. Die Form der Übertragungskurven, die zuerst von SMITH [8] angegeben wurde, ist für die Entfernung 3000 km durch internationale Vereinbarung festgelegt [9]. Sie ist halbempirisch als gültig für verschiedene Schichtmodelle bestimmt worden. Spätere experimentelle Prüfungen bewiesen [10], daß sie nicht schlecht gewählt war.

Es läßt sich zeigen, daß im logarithmischen Frequenzmaßstab die SMITHsche Kurve im interessierenden Wertbereich genügend genau durch eine Exponentialkurve angenähert werden kann. Es soll hier nicht untersucht werden, ob dies Zufall ist. Sie kann als Spannungsverlauf dargestellt werden, indem man 733 μ s nach dem direkten Impuls — was einer scheinbaren Höhe von 110 km entspricht — einen Kondensator über einen Widerstand auflädt,

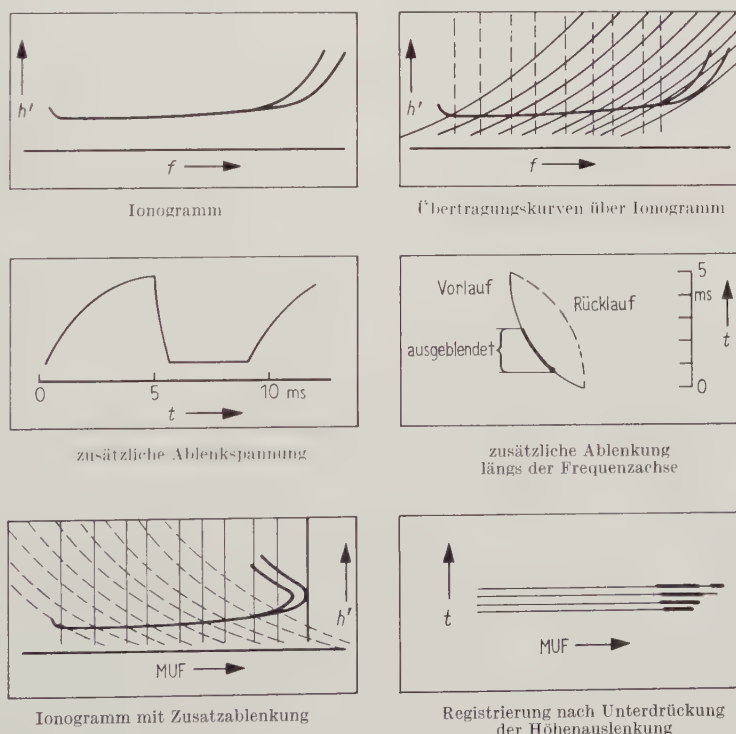


Bild 4. Umwandlung des Vertikal-Ionogramms in ein „scheinbares Fernübertragungs“-Ionogramm zur Realisierung der kontinuierlichen MUF-Registrierung.

wobei die Kombination eine Zeitkonstante von $1/360$ s hat. Mit einer solchen Darstellung der „SMITHschen“ Kurve kann man das Ionogramm zu einem scheinbaren Fernübertragungs-Ionogramm verzerren. Aus Bild 4 sieht man, daß bei dieser Verzerrung aus den SMITHschen Kurven im Vertikal-Ionogramm senkrechte Gerade geworden sind und daß die Echospur schon bei endlicher Höhe ihre größte Abszisse erreicht; dieser maximale Frequenzwert ist die F-3000-MUF. Wir verzerren also die logarithmische Frequenzablenkung durch Zusatz der genannten Aufladekurve

$$U_c = \frac{U_0}{RC \cdot 360} (1 - e^{-360t})$$

und tasten die Oszillographenröhre durch das Signal hell. Dann bleibt bei der MUF ein helles Zeichen stehen, das in einem Höhenbereich, der groß gegen die Impulsbreite ist, langsam nach oben wandert. Unterdrücken wir noch die der Echolaufzeit entsprechende Kippung, so haben wir nur noch die MUF-proportionale Auslenkung. Auf ihr werden durch die Echos Bereiche hellgetastet, wobei sich an der Obergrenze die Intensität stark erhöht. — Um zu prüfen, ob die Aufladekurve die richtige Krümmung hat, benutzen wir die Frequenzmarken, die (als Harmonische eines Quarzoszillators) in 1,5 MHz Abstand erscheinen und gleichzeitig durch 150-km-Höhenmarken moduliert sind. Erscheint die erste Höhenmarke bei 110 km, die anderen aber mit 150 km Abstand (also bei 260; 410; 560; 710; 860 km); dann gibt es eine einfache Regel für die Eichung: Geht man von 9 auf 6 MHz, dann muß auf der Registrierung die erste Höhenmarke bei 6 MHz den Platz der zweiten bei 9 MHz einnehmen; geht man auf 4,5 MHz weiter, dann soll die erste Höhenmarke auf der 3. bei 9 MHz sitzen und geht man auf 3 MHz, dann soll die erste Höhenmarke dort sein, wo bei 9 MHz die sechste Marke war (Bild 5).

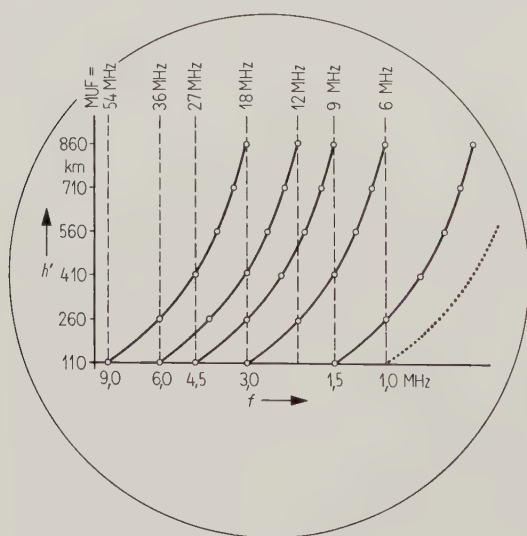


Bild 5. Eichung der MUF-Registrierung.

Wir benutzen zur endgültigen Registrierung nach der Eichung den Höhenbereich zwischen 250 und

700 km, nur dort können Echos die Oszillographenröhre hell tasten. Die Intensitätserhöhung der Zeichen bei der MUF entspricht übrigens der Fokussierung am Rand der toten Zone bei Impulsfernübertragung [11]. Mathematisch entspricht die Fokussierung der Tangenteneigenschaft der Übertragungskurve an der Echospur des Ionogramms. Auf Grund dieser Eigenschaft ist auch die Direktregistrierung der MUF mit guter Qualität und Genauigkeit möglich (Bilder 1a und 2a). Man kann im allgemeinen deutlich die beiden Komponenten unterscheiden, die durch die magnetische Doppelbrechung entstehen. Die MUF ist genau genommen zunächst für die ordentliche Komponente definiert; d. h., nur die mit dem niedrigeren Grenzwert ist korrekt dargestellt. Bis auf seltene Ausnahmen laufen aber die Schwankungen beider Züge ziemlich parallel. Abweichungen von diesem Verhalten sind sehr interessant und deuten auf einen starken horizontalen Gradienten der Ionisation hin.

9. Anwendungen

Die Anwendungsmöglichkeiten der Direktregistrierung sind außerordentlich vielfältig und noch nicht völlig zu übersehen. In Japan hat man sich vor allem bemüht, aus den klaren Intensitäts-„Mustern“ (Bild 6), die sich manchmal in den $h'(t; f_N)$, in den $f_N(t; E)$ und in den $f_N(t; F)$ -Registrierungen zeigen, Schlüsse auf die Horizontalverteilung der Ionisation zu ziehen [12].

Wir konnten durch Vergleich von Es-Intensität und -Höhe neue Gesichtspunkte zum Mechanismus dieser abnormalen Ionisation finden [13]. Doch die wichtigste und allgemeinste Anwendung wird wohl darin liegen, daß man mit dieser direkten Registrierung ionosphärischer Charakteristiken den zeitlichen Verlauf der maximalen Elektronendichte und die Höhenschwankungen der Niveaus konstanter Elektronendichte genau verfolgen kann. Dadurch wird es möglich, Amplituden und Phasen der Schwankungen verschiedener Charakteristiken untereinander und mit anderen geophysikalischen Größen zu vergleichen. Mit der „mehrdimensionalen“ Registriertechnik der Ionogramme erhält man prinzipiell eigentlich die Höhenabhängigkeit der Ionisation und theoretisch auch die Höhenabhängigkeit der Stoßzahl. Man könnte behaupten, die Ionosphärenforschung sei in ihrer Technik anderen geophysikalischen Disziplinen überlegen, wenn die richtige Ausdeutung nicht so schwierig und bei der Stoßzahl fast unmöglich wäre.

Wegen der Schwierigkeiten hat man schon mit der Wiedergabe der Meßwerte in den sogenannten „f-plots“ und „h-plots“ den Versuch gemacht, die Meßwerte durch zeitabhängige Kurven darzustellen. Stündliche Messungen reichen dafür nicht aus, bei viertelstündlicher Meßfolge wird der notwendige Aufwand sehr groß. Deshalb ist die hier beschriebene automatische Registrierung der Charakteristiken vorzuziehen. Sie hat für den Routinebetrieb den weiteren Vorteil, daß die bei der Auswertung der

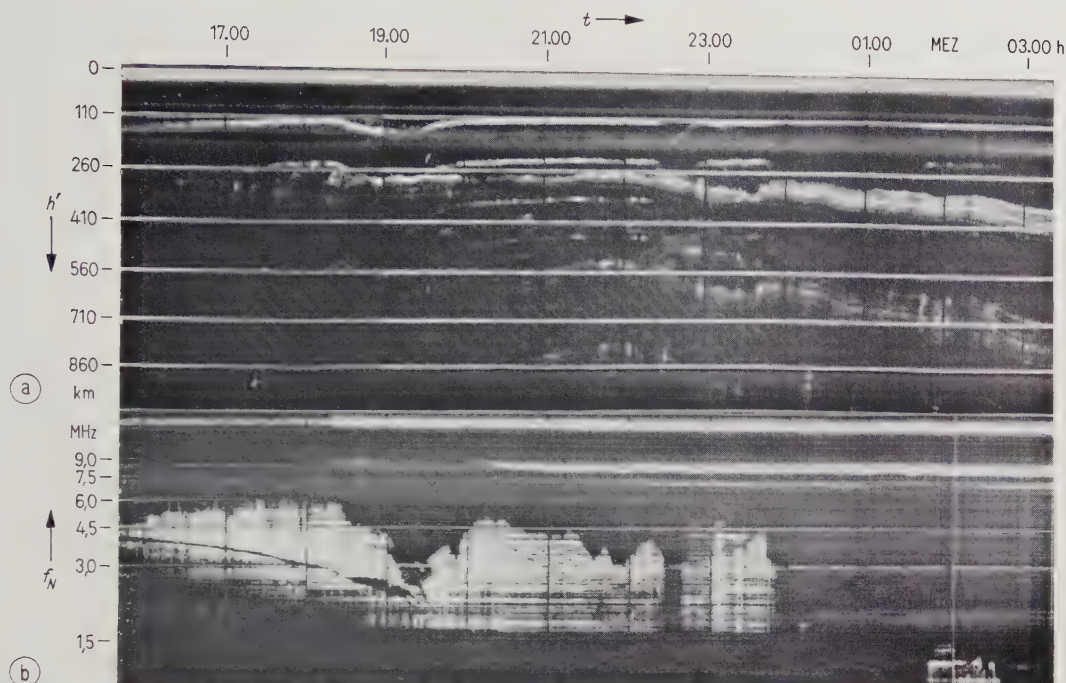


Bild 6. Charakteristiken-Registrierungen vom 10./11. Mai 1959; (a) $h'(t; f_N)$, (b) $f_N(t; E)$. Intensitäts-, „Muster“-.

Ionogramme häufig auftretenden Interpretationschwierigkeiten vermieden werden. Im Gegensatz zur Auswertung der Ionogramme, die zeitraubend ist und auf den Stationen oft von wechselnden Personen ausgeführt wird, kann hier die Auswertung jederzeit einem einzigen Bearbeiter zugemutet werden. Die Interpretation der Registrierungen erfordert zwar auch eine gewisse Erfahrung, kann aber für jedes Problem von einem Bearbeiter ausgeführt werden, der nicht sehr abhängig von der Registrier-technik urteilen muß und auch nicht auf die Vorarbeit anderer angewiesen ist.

Auf diese Weise könnte es eher gelingen, Registrierungen aus verschiedenen Gebieten der kos-

mischen Physik, etwa Beziehungen zwischen Sonne und Ionosphäre oder Erdmagnetismus und Ionosphäre [14], gemeinsam zu bearbeiten, was bisher nur von Spezialisten getrennt getan werden konnte.

Auch das Studium der Ortsabhängigkeit von Ionisation und Ionisationsregistrierungen wird erfolgreicher betrieben werden können, wenn die neue Registriertechnik an mehreren Stationen angewandt wird.

Gerade die Messungen an Raketen und Satelliten, die wertvolle zusätzliche Informationen liefern könnten, werden immer des Vergleichs mit kontinuierlichen Registrierungen ionosphärischer Charakteristiken bedürfen.

Schrifttum

- [1] SULZER, P. G., Ionosphere measuring equipment. *Electronics* **19** [1946], Nr. 7, 137–141.
- [2] BIBL, K., Une nouvelle sondeur ionosphérique. *Ann. Géophys.* **7** [1951], 265–267.
- [3] BIBL, K., Die Ionosphärenschichten und ihre dynamischen Phänomene. *Z. Geophys. Sonderband* [1953], 136–141.
- [4] BIBL, K. und RAWER, K., Traveling disturbances originating in the outer ionosphere. *J. Geophys. Res.* **64** [1959], 2232–2237.
- [5] NAKATA, Y., KAN, M. und UYEDA, H., Simultaneous measurement of sweep frequency $h'f$ and f_{ct} of the ionosphere. *Rep. Ionosph. Res. Japan* **7** [1953], 1–5, 129–136.
- [6] BIBL, K., Zur Dynamik der Ionosphäre. *Z. Geophys.* **24** [1958], 1–33.
- [7] BIBL, K., Automatic recording of ionospheric characteristics. *J. atmos. terrest. Phys.* **8** [1956], 295.
- [8] SMITH, N., The relation of radio sky-wave transmission to ionosphere measurements. *Proc. Inst. Radio Engrs.* **27** [1939], 332–347.
- [9] Ionospheric vertical soundings. *Annales de l'IGY, Vol. III, Part I*, S. 121.
- [10] SILBERSTEIN, R., Sweep frequency backscatter — Some observations and deductions. *Transact. Inst. Radio Engrs.* AP-2 [1954], 56–63.
- [11] SILBERSTEIN, R., A long-distance pulse-propagation experiment on 20.1 megacycles. *J. Geophys. Res.* **63** [1958], 335–351.
- [12] MÖLLER, H. G., Sweep frequency oblique-incidence experiment over a distance of 1320 km. *J. atmos. terrest. Phys.* **9** [1956], 155–156.
- [13] MÖLLER, H. G., Further results of sweep frequency oblique-incidence experiments. *J. atmos. terrest. Phys.* **13** [1958/59], 173.
- [14] POEVERLEIN, H., Field strength near the skip distance. *Air Force Cambridge Research Center, Bericht TR-54-104* [1955].
- [15] BIBL, K., Experimental proof of focusing at the skip distance by backscatter records. *Proc. Inst. Radio Engrs.* **48** [1960], 956–957.
- [16] UYEDA, H. und NAKATA, Y., Study of the selective fading appearing in the f_{ct} -traces. *J. Radio Res. Lab. Japan* **3** [1956], 119–133.
- [17] UYEDA, H. und NAKATA, Y., Continuous sweep frequency traces, their properties and applications. *J. Radio Res. Lab. Japan* **1** [1954], 17–30.
- [18] BIBL, K., Sur le mécanisme d'ionisation de la couche sporadique Es de l'ionosphère. *Ann. Géophys.* **16** [1960], 148–151.
- [19] BIBL, K., Dynamic characteristics of the ionosphere and their coherency with the local and planetary magnetic index. *J. Geophys. Res.* **65** [1960], im Druck.

Erhöhung des Verstärkungsgrades eines breitbandigen Kettenverstärkers durch Kompensation seiner Nullstellen und durch Anordnung der restlichen Pole auf einer TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse*

Von JOACHIM KOCH

Mitteilung aus dem Institut für Rundfunktechnik, Hamburg

(A.E.Ü. 14 [1960], 348 – 360; eingegangen am 3. Februar 1960)

DK 621.375.2.029.6

Es wird ein Kettenverstärker beschrieben, dessen Frequenzgang auf Grund des Verfahrens der Nullstellenkompensation nach TSCHEBYSCHEFF dimensioniert ist. Aus der Knotenanalyse und der Forderung des TSCHEBYSCHEFFSchen Verhaltens wird für einen Kettenverstärker mit zwei Röhren ein Gleichungssystem gewonnen, für das eine Näherungslösung angegeben wird. Daraufhin werden für eine Grenzfrequenz von 300 MHz die einzelnen Schaltelemente des Verstärkers, sein Frequenzgang sowie der Frequenzgang der Gitter- und Anodenkette für sich allein berechnet. Für Kettenverstärker mit beliebig vielen Röhren werden allgemeine Formeln gefunden und die Möglichkeiten der Nullstellenkompensation diskutiert. Zur Prüfung der theoretischen Ergebnisse wurde ein Kettenverstärker mit zwei Röhren gebaut. Die gefundenen Frequenzgänge der Gitter- und Anodenkette folgen im wesentlichen den errechneten Kurven. Dem experimentellen Frequenzgang des gesamten Verstärkers, der die erwartete TSCHEBYSCHEFFSche Schwankung zeigt, ist zunächst ein Verstärkungsanstieg mit zunehmender Frequenz überlagert, der jedoch durch geeignete Maßnahmen weitgehend vermindert werden kann. Der verbleibende Anstieg wird theoretisch geklärt. Ein Vergleich der TSCHEBYSCHEFFSchen Kettenverstärker mit den bisher üblichen Kettenverstärkern läßt eine um den Faktor 1,84 größere Verstärkung erkennen. Die Arbeit schließt mit einer Betrachtung über die Zusammenschaltung mehrerer Kettenverstärkerstufen.

The article describes a chain amplifier, the frequency characteristic of which is dimensioned according to TSCHEBYSCHEFF on the basis of the method of zero compensation. From an analysis of the nodes and the requirement of TSCHEBYSCHEFF behavior, a set of equations is obtained for a two-tube chain amplifier, for which an approximate solution is given. For a limiting frequency of 300 Mc/s the article subsequently calculates the various components of the amplifier, its frequency characteristic as well as the frequency characteristics of the grid and anode chains alone. General formulae are found for chain amplifiers with any given number of tubes, and the possibilities of zero compensation are discussed. A two-tube chain amplifier was constructed for the purpose of verifying the theoretical results. The frequency characteristics of the grid and anode chains followed in the main the calculated curves. To the experimental frequency characteristic of the overall amplifier, which shows the expected TSCHEBYSCHEFF fluctuation, there is initially superimposed an increase in amplification with frequency, which, however, may be considerably reduced by suitable measures. The remaining increase is explained theoretically. A comparison of the TSCHEBYSCHEFF chain amplifier with the existing usual chain amplifiers shows an amplification that is greater by the factor 1.84. The paper concludes with a discussion of the cascading of several chain-amplifier stages.

1. TSCHEBYSCHEFFSche Verstärker und Dimensionierung von Kettenverstärkern nach TSCHEBYSCHEFF

Es sind sowohl breitbandige Trägerfrequenz- als auch Videofrequenzverstärker bekannt, deren Frequenzgänge TSCHEBYSCHEFFSches Verhalten zeigen, d. h. im Übertragungsbereich ist eine gewisse regelmäßige und konstante Schwankung entsprechend der TSCHEBYSCHEFFSchen Funktion zugelassen, die einen vorgegebenen Wert erreichen, aber nicht überschreiten soll [1]. Durch diese Maßnahme kann das Produkt aus Bandbreite und Verstärkung erhöht werden, und außerdem besteht noch der Vorteil, daß außerhalb des Übertragungsbereiches der Verstärkungsgrad erheblich steiler als bei den üblichen Verstärkern abfällt.

* Gekürzte Fassung einer Doktorarbeit, eingereicht bei der mathem.-naturw. Fakultät der Universität Hamburg (Referent Prof. Dr. H. G. MÖLLER) und ausgeführt in der Abteilung B 3 (Physikalisch-physiologische Grundlagen, Dr. F. BELOW) des Instituts für Rundfunktechnik, Hamburg.

In der vorliegenden Arbeit soll die TSCHEBYSCHEFFSche Dimensionierung auch auf Kettenverstärker [2], [3] übertragen werden. Hierzu muß zunächst ein allgemeiner Ausdruck für die Verstärkung $V = \frac{U_{\text{Ausg}}}{U_{\text{Eing}}}$, d. h. die Übertragungsfunktion gefunden werden, wobei Verluste in den Schaltelementen unberücksichtigt bleiben sollen. Wegen der mehrfachen Stromeinspeisungen in die Anodenkette ist zu erwarten, wie auch später gezeigt wird, daß es sich bei der Übertragungsfunktion um eine gebrochene rationale Funktion handelt, und es ist daher mit dem Auftreten von Polen und Nullstellen zu rechnen. Es muß nun angestrebt werden, die Pole nach TSCHEBYSCHEFF zu dimensionieren, d. h. sie in der komplexen Frequenzebene auf eine Ellipse mit vorgegebener kleiner Halbachse, deren Größe ein Maß für die Schwankung ist, zu legen und den Einfluß der Nullstellen irgendwie zu beseitigen.

Zur Ausschaltung des Einflusses der Nullstellen bestehen mehrere Möglichkeiten. Nach Arbeiten amerikanischer Autoren [4], [5], [6], [7] ist es möglich, die Nullstellen in den TSCHEBYSCHEFFSchen

Verlauf einzubeziehen, d. h. die Pole und Nullstellen so anzuordnen, daß trotz der Nullstellen eine konstante Schwankung erhalten bleibt. In einer unveröffentlichten Diplomarbeit ist außerdem die TSCHEBYSCHEFFSche Dimensionierung von Kettenverstärkern untersucht worden [8]. Dabei wurde der Frequenzgang sowohl der Gitter- als auch der Anodenkette für sich allein nach TSCHEBYSCHEFF dimensioniert, jedoch zeigte der gesamte Verstärker dann keineswegs TSCHEBYSCHEFFSches Verhalten, sondern nur sehr unregelmäßige und große, keineswegs mehr tragbare Schwankungen im Übertragungsbereich.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei andere Verfahren erläutert. Das erste ist die sogenannte Nullstellenkompensation, worunter das Zusammenfallen der Nullstellen mit einer gleichen Zahl von Polen an beliebigen Stellen der komplexen Frequenzebene und die TSCHEBYSCHEFFSche Dimensionierung der restlichen Pole zu verstehen ist. Bei dem zweiten sind die Nullstellen weit außerhalb der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse zu legen, so daß sie den Frequenzgang nur noch unwesentlich beeinflussen. Im Verlauf der theoretischen Untersuchungen, die zunächst auf einen Kettenverstärker mit zwei Röhren beschränkt bleiben mögen, wird sich herausstellen, daß von diesen zwei Verfahren nur das zuerst beschriebene mit den Mitteln dieser Arbeit tatsächlich durchführbar ist.

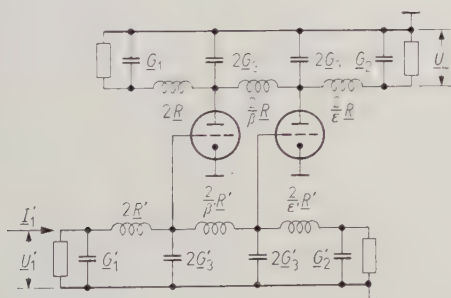


Bild 1. Schaltbild des Kettenverstärkers mit zwei Röhren.

2. Theoretische Berechnungen

2.1. Aufstellung der Gleichungen und Matrizen des Kettenverstärkers mit zwei Röhren

Zur Durchführung der TSCHEBYSCHEFFSchen Dimensionierung des Kettenverstärkers muß zunächst die Verstärkung berechnet werden. Aus Bild 1 liest man folgende Gleichungssysteme ab (Knotenanalyse):

für die Gitterkette:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 \underline{G}_1 + (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \frac{1}{2 \underline{R}'} &= \underline{I}_1, \\ 2 \underline{U}_2 \underline{G}_3 + (\underline{U}_2 - \underline{U}_1) \frac{1}{2 \underline{R}'} + (\underline{U}_2 - \underline{U}_3) \frac{\beta'}{2 \underline{R}'} &= 0, \\ 2 \underline{U}_3 \underline{G}_3 + (\underline{U}_3 - \underline{U}_2) \frac{\beta'}{2 \underline{R}'} + (\underline{U}_3 - \underline{U}_4) \frac{\varepsilon'}{2 \underline{R}'} &= 0, \\ \underline{U}_4 \underline{G}_2 + (\underline{U}_4 - \underline{U}_3) \frac{\varepsilon'}{2 \underline{R}'} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

für die Anodenkette:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 \underline{G}_1 + (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \frac{1}{2 \underline{R}} &= 0, \\ 2 \underline{U}_2 \underline{G}_3 + (\underline{U}_2 - \underline{U}_1) \frac{1}{2 \underline{R}} + (\underline{U}_2 - \underline{U}_3) \frac{\beta}{2 \underline{R}} &= S \underline{U}_2', \\ 2 \underline{U}_3 \underline{G}_3 + (\underline{U}_3 - \underline{U}_2) \frac{\beta}{2 \underline{R}} + (\underline{U}_3 - \underline{U}_4) \frac{\varepsilon}{2 \underline{R}} &= S \underline{U}_3', \\ \underline{U}_4 \underline{G}_2 + (\underline{U}_4 - \underline{U}_3) \frac{\varepsilon}{2 \underline{R}} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Multiplikation mit $2 \underline{R}'$ bzw. $2 \underline{R}$ sowie Einführen der Abkürzungen

$$\begin{aligned} A' &= 2 \underline{G}_1 \underline{R}', & A &= 2 \underline{G}_1 \underline{R}, \\ B' &= 4 \underline{G}_3 \underline{R}', & \text{bzw. } B &= 4 \underline{G}_3 \underline{R}, \\ C' &= 2 \underline{G}_2 \underline{R}', & C &= 2 \underline{G}_2 \underline{R} \end{aligned} \quad (3)$$

ergeben die Matrixgleichungen

$$\begin{pmatrix} A' + 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & B' + 1 + \beta' & -\beta' & 0 \\ 0 & -\beta' & B' + \varepsilon' + \beta' & -\varepsilon' \\ 0 & 0 & -\varepsilon' & C' + \varepsilon' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \underline{I}_1 \underline{R}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} A + 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & B + 1 + \beta & -\beta & 0 \\ 0 & -\beta & B + \varepsilon + \beta & -\varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & C + \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 S \underline{R} \underline{U}_2' \\ 2 S \underline{R} \underline{U}_3' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus lassen sich die für die Verstärkung \underline{V} benötigten Größen \underline{U}_4 und \underline{U}_1' berechnen. Für \underline{V} erhält man somit

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1'} = \\ &= \frac{2 \varepsilon S \underline{R}}{A} \frac{[(C' + \varepsilon')(B' + \varepsilon' + \beta') - \varepsilon'^2](A + 1) \beta + \beta'(C' + \varepsilon')[(A + 1)(B + 1 + \beta) - 1]}{[(C' + \varepsilon')(B' + \varepsilon' + \beta') - \varepsilon'^2](B' + 1 + \beta') - \beta'^2(C' + \varepsilon')}. \end{aligned} \quad (4)$$

Δ bedeutet die Determinante der ungestrichenen Matrix. Ihre Berechnung ergibt

$$\Delta = \begin{vmatrix} A+1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & B+1+\beta & -\beta & 0 \\ 0 & -\beta & B+\varepsilon+\beta & -\varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & C+\varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$= (AB + A + B)(BC + \varepsilon C + \varepsilon B) +$$

$$+ \beta(A+1)(BC + \varepsilon C + \varepsilon B) +$$

$$+ \beta(C + \varepsilon)(AB + A + B). \quad (5)$$

Um zur Polynomdarstellung zu gelangen, wird jetzt die normierte Frequenz $p = j\omega/\omega_g$ eingeführt, wobei ω_g die Grenzfrequenz (gewünschte Bandbreite des Verstärkers) bedeutet, über die später verfügt wird. Aus

$$\underline{G}_1 = pC_1 + \frac{1}{R_1}, \quad \underline{G}_3 = pC_3,$$

$$\underline{G}_2 = pC_2 + \frac{1}{R_2}, \quad \underline{R} = pL$$

und den entsprechenden Gleichungen für die gestrichenen Größen folgen unter Berücksichtigung von Gl. (3) für A , B und C

$$A = 2 \left(p^2 L C_1 + p \frac{L}{R_1} \right),$$

$$B = 4 p^2 L C_3, \quad (6)$$

$$C = 2 \left(p^2 L C_2 + p \frac{L}{R_2} \right)$$

und die entsprechenden Gleichungen für A' , B' und C' .

Setzt man diese Ausdrücke in die Gl. (4) und (5) ein, so sind die Koeffizienten der Polynome aus den Größen

$L, C_1, C_2, C_3, R_1, R_2, \varepsilon, \beta; L', C'_1, C'_3, R'_2, \varepsilon'$ und β' zusammengesetzt. Man beachte das Fehlen von C'_1 und R'_1 in dieser Aufzählung. Es handelt sich um die Schaltelemente am Eingang der Gitterkette, die auf den Frequenzgang des Verstärkers keinen Einfluß haben, da die Spannung am Eingang konstant

gehalten wird. C_3 , die schädliche Kapazität der Antode, ist jedoch durch den Aufbau der Röhre bereits bestimmt, und eine Vergrößerung dieser Kapazität würde einen Verlust an Verstärkung bedeuten.

Ebenso kann R'_2 bereits vorher auf 60Ω festgelegt werden, um die Gitterkette dem üblichen Belastungswiderstand des später zu verwendenden Generators anzupassen. Mit $R'_2 = 60 \Omega$ dürfen sich für C'_3 allerdings keine Kapazitäten ergeben, die kleiner als die schädlichen Gitterkapazitäten sind, womit eine obere Grenze für diesen Anpassungswiderstand festgelegt ist.

Es verbleiben also zwölf Größen. Die Möglichkeit der verschiedenen Dimensionierung der Kapazität C'_3 (schädliche Gitterkapazität und eventuelle Zusatzkapazität) wurde zunächst wegen des dann stark ansteigenden Umfanges der Gleichungen nicht in Betracht gezogen.

Will man \underline{V} explizit als Funktion von p angeben, so empfiehlt es sich, weitere Abkürzungen einzuführen. Wir definieren:

$$\alpha = \sqrt{L C_2}, \quad \delta = C_3/C_2, \quad \eta = 1/R_2 C_2, \quad (7)$$

$$\gamma = 1/R_1 C_1, \quad \zeta = C_1/C_2,$$

wozu noch die bereits in Bild 1 eingeführten Größen β und ε treten, die das Verhältnis der ersten Induktivität ($2R = 2pL$) zur zweiten und dritten in der Kette darstellen. Man erhält sieben ungestrichene, und, da A' und damit auch ζ' und γ' in der Übertragungsfunktion nicht auftreten, fünf gestrichene, insgesamt also wieder zwölf Größen.

Für A , B und C ergibt sich mithin aus den Gl. (6) und (7)

$$A = 2\alpha^2 \zeta p(p + \gamma),$$

$$B = 4\alpha^2 \delta p^2,$$

$$C = 2\alpha^2 p(p + \eta).$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich für die gestrichenen Größen. Einsetzen dieser Ausdrücke in die Determinante Δ und nachfolgende Division durch $64\alpha^8 \delta^2 \zeta p$, wobei p später gegen das p in $R = pL$ (Zähler von Gl. (4)) gekürzt wird, führen zu einem Polynom siebenten Grades, das im folgenden mit X bezeichnet sei:

$$X = p^7 + (\gamma + \eta) p^6 + \frac{1}{4\alpha^2 \delta \zeta} [2\beta \zeta + \zeta(\varepsilon + 1) + 2\delta(1 + \varepsilon \zeta) + 4\alpha^2 \zeta \eta \delta \gamma] p^5 +$$

$$+ \frac{1}{4\alpha^2 \delta \zeta} [\zeta(2\beta + 1)(\eta + \gamma) + \varepsilon \zeta(\eta + \gamma + 2\delta \gamma) + 2\delta \eta] p^4 +$$

$$+ \frac{1}{16\alpha^4 \delta^2 \zeta} [\varepsilon(1 + 2\delta)(\zeta + 2\delta) + 4\alpha^2 \delta \zeta \eta \gamma(1 + 2\beta + \varepsilon) + 4\beta \delta(\varepsilon \zeta + 1) + \beta \zeta(\varepsilon + 1)] p^3 +$$

$$+ \frac{1}{16\alpha^4 \delta^2 \zeta} \{ \zeta(\varepsilon + \beta + \varepsilon \beta)(\gamma + \eta) + 2\delta[\eta(\varepsilon + 2\beta) + \varepsilon \zeta \gamma(1 + 2\beta)] \} p^2 +$$

$$+ \frac{1}{32\alpha^6 \delta^2 \zeta} [2\alpha^2 \zeta \eta \gamma(\varepsilon + \beta + \varepsilon \beta) + \varepsilon \beta(1 + \zeta + 4\delta)p + \frac{\varepsilon \beta}{32\alpha^6 \delta^2 \zeta} (\eta + \zeta \gamma)]. \quad (8)$$

Der im Nenner von Gl. (4) außerdem noch stehende Ausdruck

$$[(C' + \varepsilon')(B' + \varepsilon' + \beta') - \varepsilon'^2](B' + 1 - \beta') - \beta'^2(C' + \varepsilon')$$

erhält nach Einsetzen von A' , B' und C' und nach Division durch $32\alpha'^6 \delta'^2$ die Form (Polynom sechsten Grades)

$$Y = p^6 + \eta' p^5 + \frac{1}{4\alpha'^2\delta'}(1 + \varepsilon' + 2\beta' + 2\varepsilon'\delta')p^4 + \frac{\eta'}{4\alpha'^2\delta'}(1 + \varepsilon' + 2\beta')p^3 +$$

$$+ \frac{1}{16\alpha'^4\delta'^2}(\varepsilon' + \beta' + \varepsilon'\beta' + 4\varepsilon'\beta'\delta' + 2\varepsilon'\delta')p^2 +$$

$$+ \frac{\eta'}{16\alpha'^4\delta'^2}(\varepsilon' + \beta' + \varepsilon'\beta')p + \frac{\varepsilon'\beta'}{32\alpha'^6\delta'^2}. \quad (9)$$

Der im Zähler von Gl. (4) stehende Ausdruck

$$[(C' + \varepsilon')(B' + \varepsilon' + \beta') - \varepsilon'^2](A + 1)\beta + \beta'(C' + \varepsilon')[A + 1](B + 1 + \beta) - 1]$$

ergibt nach Division durch $16\alpha'^2\alpha^2\zeta(\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta)$ das Polynom Z (ebenfalls sechsten Grades)

$$Z = p^6 + (\eta' + \gamma)p^5 + \left\{ \frac{\beta}{4\alpha'^2\zeta(\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta)} [\alpha^2\zeta(\varepsilon' + \beta' + 2\delta'\varepsilon') + 4\alpha'^2\alpha^2\zeta\gamma\delta'\eta' + 2\alpha'^2\delta'] + \right.$$

$$+ \frac{\beta'}{4\alpha'^2\zeta(\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta)} [\alpha'^2(\zeta + 2\delta + \beta\zeta) + 2\alpha^2\delta\zeta(\varepsilon' + 2\alpha'^2\gamma\eta')] \Big\} p^4 +$$

$$+ \left\{ \frac{\beta}{4\alpha'^2\zeta(\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta)} [\alpha^2\zeta\eta'(\varepsilon' + \beta') + \alpha^2\zeta\gamma(\varepsilon' + \beta' + 2\delta'\varepsilon') + 2\alpha'^2\delta'\eta'] + \right.$$

$$+ \frac{\beta'}{4\alpha'^2\zeta(\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta)} [\alpha'^2\zeta\gamma(1 + \beta) + \alpha'^2\eta'(\zeta + 2\delta + \beta\zeta) + 2\alpha^2\zeta\delta\gamma\varepsilon'] \Big\} p^3 +$$

$$+ \left\{ \frac{\beta}{8\alpha'^2\alpha^2\zeta} \frac{\alpha^2\zeta\varepsilon'\beta' + 2\alpha^2\alpha'^2\zeta\gamma\eta'(\varepsilon' + \beta') + \alpha'^2(\varepsilon' + \beta' + 2\delta'\varepsilon')}{\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta} + \right.$$

$$+ \frac{\beta'}{8\alpha'^2\alpha^2\zeta} \frac{\alpha'^2\beta + 2\alpha^2\alpha'^2\zeta\gamma\eta'(1 + \beta) + \alpha^2\varepsilon'(\zeta + 2\delta + \beta\zeta)}{\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta} \Big\} p^2 +$$

$$+ \left\{ \frac{\beta}{8\alpha'^2\alpha^2\zeta} \frac{\alpha^2\zeta\gamma\varepsilon'\beta' + \alpha'^2\eta'(\varepsilon' + \beta')}{\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta} + \frac{\beta'}{8\alpha'^2\alpha^2\zeta} \frac{\alpha'^2\beta\eta' + \alpha^2\zeta\gamma(1 + \beta)\varepsilon'}{\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta} \right\} p +$$

$$+ \frac{\varepsilon'\beta'\beta}{8\alpha'^2\alpha^2\zeta(\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta)}. \quad (10)$$

Mithin folgt als endgültiger Ausdruck für die Verstärkung

$$\underline{V} = SL \frac{\varepsilon(\alpha'^2\beta\delta' + \alpha^2\beta'\delta)}{64\alpha^6\alpha'^4\delta^2\delta'^2} \frac{Z}{XY}. \quad (11)$$

2.2. Lösungsmöglichkeiten des Gleichungssystems bzw. Ausschaltung des Nullstelleneinflusses

Um den Verstärker nach TSCHEBYSCHEFF zu dimensionieren, d. h. um die gleiche Polstellenverteilung zu erhalten wie bei der TSCHEBYSCHEFFSchen Funktion, soll zunächst der Einfluß der Nullstellen des Zählers ausgeschaltet werden. Die TSCHEBYSCHEFFSche Funktion lautet

$$\left| \frac{U_{\text{Eing}}}{U_{\text{Ausg}}} \right|^2 = K \left[\frac{e^{2b_w} + 1}{2} + \frac{e^{2b_w} - 1}{2} T_{2n}(x) \right] =$$

$$= K \left[\frac{1 + (1 - S)^2}{2(1 - S)^2} + \frac{1 - (1 - S)^2}{2(1 - S)^2} T_{2n}(x) \right] =$$

$$= K \left\{ \frac{(1 + \lambda)^{2n} + (1 - \lambda)^{2n}}{[(1 + \lambda)^n - (1 - \lambda)^n]^2} + \right. \quad (12)$$

$$\left. + \frac{2(1 - \lambda^2)^n}{[(1 + \lambda)^n - (1 - \lambda)^n]^2} T_{2n}(x) \right\} =$$

$$= \frac{K}{\left| \prod_{k=1}^n p_k \right|^2} \left| \prod_{k=1}^n (p - p_k) \right|^2.$$

Es bedeuten b_w Welligkeit (vorgegebene Dämpfung nach [1]), $T_{2n}(x) = \cos(2n \arccos x)$ TSCHEBYSCHEFFSches Polynom, K Konstante, S Schwankung [9],

$$p_k = -\lambda \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2n} \pi,$$

$$\omega = -jp = x/\sqrt{1 - \lambda^2},$$

λ Schwankungsmaß, d. h. kleine Halbachse der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse.

b_w kann Werte zwischen Null (keine Schwankung) und unendlich (volle Schwankung), S zwischen Null und eins, λ zwischen eins und Null annehmen. Durch Vorgabe einer der drei Größen b_w , S oder λ sind die anderen zwei eindeutig bestimmt durch die Beziehungen

$$\tanh \frac{b_w}{2} = \frac{S}{2 - S} = \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right)^n. \quad (13)$$

Die Ausschaltung des Einflusses der Nullstellen kann entweder geschehen, wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, indem man die Nullstellen

des Zählers mit einigen geeigneten Polen (Nullstellen des Nenners) zusammenfallen läßt und die restlichen Pole nach TSCHEBYSCHEFF dimensioniert, oder aber näherungsweise, indem die Nullstellen entweder allein oder mit einer Anzahl von Polen, mit denen sie aber nicht zusammenzufallen brauchen, möglichst weit außerhalb der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse gelegt werden, wo ihr Einfluß auf die Übertragungsfunktion gering ist.

Es sei zunächst die erste Möglichkeit diskutiert. Die Kompensation der sechs Nullstellen des Zählerpolynoms Z mit der gleichen Zahl von Polen führt zu sechs Bestimmungsgleichungen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \alpha', \beta', \delta', \varepsilon', \eta'$, während die im Nenner verbleibenden sieben Pole durch die TSCHEBYSCHEFFSche Dimensionierung weitere sieben Gleichungen ergeben würden. Dem stehen nur die zwölf erwähnten Unbekannten gegenüber, wie bereits bei der Diskussion über die zur Verfügung stehenden Schaltelemente erläutert wurde, und es ist erforderlich, eine weitere Unbekannte hinzuzunehmen.

Die zugelassene Schwankung im Übertragungsbereich möge etwa 10% ($S = 0,1$) betragen. Sie kann in Gestalt der Schwankungsgröße λ als weitere Unbekannte dienen, wenn man aus allen möglichen Lösungen des Gleichungssystems diejenige aussucht, deren λ einer Schwankung von $S = 0,1$ entspricht.

Nach dem Satz von ABEL [10] kann man grundsätzlich die Nullstellen eines Polynoms fünften oder höheren Grades nicht allgemein in geschlossener Form darstellen. Es ist daher auch nicht möglich, die Nullstellen der Polynome X, Y und Z explizit als Funktionen der Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \alpha', \beta', \delta', \varepsilon'$ und η' anzugeben und durch Gleichsetzen der Nullstellen mit einer geeignet erscheinenden Auswahl der Pole Bedingungen für diese Größen zu gewinnen.

Daher wäre es in diesem Fall erforderlich, die Polynome sechsten und siebenten Grades im Nenner zu einem Polynom dreizehnten Grades auszumultiplizieren und durch das Polynom sechsten Grades im Zähler aufgehend zu dividieren. Aufgehend dividieren heißt, Werte für die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \alpha', \beta', \delta', \varepsilon'$ und η' so zu wählen, daß der Rest verschwindet. Außerdem muß der Quotient, ein Polynom siebenten Grades, nach TSCHEBYSCHEFF dimensioniert werden, indem ein Koeffizientenvergleich mit der TSCHEBYSCHEFFSchen Funktion vorgenommen wird. Auf diese Weise ergeben sich die gesuchten dreizehn Gleichungen. Die hierzu erforderlichen Berechnungen sind jedoch außerordentlich umfangreich, da die Mehrzahl der Gleichungen nicht linear und sehr verwickelt aufgebaut ist.

Die andere oben erwähnte Möglichkeit, die Nullstellen und eine Anzahl von Polen weit außerhalb der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse anzuordnen, bedingt offensichtlich einen nicht so großen rechnerischen Aufwand. Bei diesem Verfahren wäre z. B. das Polynom X siebenten Grades im Nenner (Anodenkette) nach TSCHEBYSCHEFF zu dimensionieren, die dadurch bestimmten Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ und η in den Zähler einzusetzen und nun zu ver-

suchen, für $\alpha', \beta', \delta', \varepsilon'$ und η' (Gitterkette) Werte so geschickt zu wählen, daß die Nullstellen und restlichen Pole weit außerhalb der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse liegen. Trotz einiger Versuche und Berechnungen in dieser Richtung gelang es nicht, sämtliche Nullstellen und die in Frage kommenden Pole so zu legen, daß sie das TSCHEBYSCHEFFSche Verhalten des Frequenzganges genügend wenig beeinflussen, denn immer lagen einige Nullstellen in der Nähe der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse. Die Ursache hierfür ist offenbar darin zu suchen, daß für die Lage dieser Pole ausschließlich die $\alpha', \beta', \delta', \varepsilon'$ und η' maßgebend sind, für die große numerische Werte gewählt werden mußten, um die Pole weit außerhalb der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse zu halten. In den Koeffizienten des Zählers dagegen kommen außer den gestrichenen noch die ungestrichenen Größen vor, die durch die Lage der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse bestimmt sind und deren numerische Werte in der Größenordnung eins liegen. Die Koeffizienten haben also mittlere Werte, und infolgedessen lagen die Nullstellen im allgemeinen in der Mitte zwischen den TSCHEBYSCHEFFSchen Polen und den weit außerhalb der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse befindlichen Polen. Aus den genannten Gründen konnte dieses Verfahren nicht angewendet werden.

2.3. Lösung des Gleichungssystems mit der elektronischen Rechenmaschine. Resultierende Werte der Schaltelemente des Kettenverstärkers bei einer oberen Grenzfrequenz von 300 MHz

Somit verblieb als einziger Ausweg, die Nennerpolynome Y (9) und X (8) sechsten und siebenten Grades zu einem Polynom dreizehnten Grades auszumultiplizieren, dieses durch das Zählerpolynom Z (10) sechsten Grades aufgehend zu dividieren und das sich ergebende Polynom siebenten Grades nach TSCHEBYSCHEFF zu dimensionieren. In der komplexen Frequenzebene müssen dann je eine Nullstelle und ein Pol zusammenfallen, während die übrigen Pole auf der TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse liegen sollen.

Diese außerordentlich komplizierte Rechnung, die im Mathematischen Seminar der Universität Kiel von Herrn Prof. Dr. K. H. WEISE, z. T. unter Verwendung einer elektronischen Rechenmaschine durchgeführt wurde, ergab die Werte ¹:

$$\begin{array}{ll} \alpha' = 0,7094 & \alpha = 0,7073 \\ \beta' = 0,5799 & \beta = 0,4977 \\ \delta' = 1,0687 & \gamma = 0,5588 \\ \varepsilon' = 0,6192 & \delta = 2,1060 \\ \eta' = 0,7466 & \varepsilon = 0,6434 \\ & \zeta = 2,3460 \\ & \eta = 0,9762 \\ & \lambda = 0,2102 \end{array} \quad (14)$$

¹ Für diese Berechnungen bin ich Herrn Prof. Dr. K. H. WEISE, Direktor des Mathematischen Seminars der Universität Kiel, sowie seinen Mitarbeitern sehr zu Dank verpflichtet.

Diese Ergebnisse stellen jedoch keine exakte Lösung des Gleichungssystems dar, sondern nur eine recht gute Näherung, und es ist keineswegs erwiesen, ob obige Forderung des Aufgehens ohne Rest zu verwirklichen ist und somit eine exakte Lösung überhaupt existiert.

Der Verstärker soll bis zu einer oberen Grenzfrequenz von $f_g = 300\text{ MHz}$ arbeiten, d. h. $\omega_g = 1,885 \cdot 10^9\text{ s}^{-1}$. p ist jetzt also so normiert, daß der Wert $p = j\omega/\omega_g = j$ der Grenzfrequenz $f_g = 300\text{ MHz}$ entspricht. Die Berechnung der Schaltelemente aus den oben angegebenen Werten ergibt unter Berücksichtigung der bereits festgelegten Größen R'_2 und C_3 :

für die Gitterkette:

$$\begin{aligned} R'_2 &= 60\ \Omega, & 2L' &= 23,9\text{ nH}, \\ C'_2 &= 11,8\text{ pF}, & 2L'/\beta' &= 41,23\text{ nH}, \\ 2C'_3 &= 25,3\text{ pF}, & 2L'/\epsilon' &= 38,61\text{ nH}; \end{aligned}$$

für die Anodenkette:

$$\begin{aligned} 2C_3 &= 7\text{ pF} \text{ (schädliche Kapazität} \\ &\quad \text{+ Schaltkapazität),} \\ C_2 &= 1,66\text{ pF}, & R_1 &= 243,5\ \Omega, \\ C_1 &= 3,90\text{ pF}, & R_2 &= 327\ \Omega, \\ 2L &= 169,6\text{ nH}, \\ 2L/\beta &= 340,8\text{ nH}, \\ 2L/\epsilon &= 263,6\text{ nH}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Frequenzganges des Verstärkers ist die genaue Kenntnis der Lage der Nullstellen und Pole erforderlich. Hierzu muß man die numerischen Koeffizienten der Polynome X (8), Y (9) und Z (10) aus den in Gl. (14) angegebenen Werten bestimmen und daraus die Wurzeln dieser Polynome ermitteln. Die Wurzeln sind in Gl. (15) angegeben, wobei hinter jeder Wurzel das zugehörige Polynom vermerkt ist.

Die Nullstellen kompensieren sich näherungsweise mit folgenden Polen:

Nullstellen:

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= -0,3381 \pm j\,0,6691, \\ p_{3,4} &= -0,1538 \pm j\,0,8074, \\ p_{5,6} &= -0,1608 \pm j\,0,2958, \end{aligned} \right\} \text{ Polynom } Z$$

kompenzierte Pole:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -0,3411 \pm j\,0,6802, & \text{Polynom } X \\ p_{3,4} &= -0,1641 \pm j\,0,7922, & \text{Polynom } Y \text{ (15)} \\ p_{5,6} &= -0,1627 \pm j\,0,3097, & \text{Polynom } Y \end{aligned}$$

restliche Pole:

$$\begin{aligned} p_{7,8} &= -0,0465 \pm j\,0,9800, & \text{Polynom } Y \\ p_{9,10} &= -0,1240 \pm j\,0,7891, & \text{Polynom } X \\ p_{11,12} &= -0,1865 \pm j\,0,4128, & \text{Polynom } X \\ p_{13} &= -0,2318. \end{aligned}$$

Die restlichen Pole liegen näherungsweise auf einer TSCHEBYSCHEFFSchen Ellipse. Die zu dieser Ellipse gehörenden exakten TSCHEBYSCHEFFSchen Pole, die

für $\lambda = 0,2318$ ($S = 7,34\%$) berechnet sind, damit der reelle Pol der Übertragungsfunktion und der der TSCHEBYSCHEFFSchen Funktion zusammenfallen, liegen bei

$$\begin{aligned} p_{7,8} &= -0,0516 \pm j\,0,9749, \\ p_{9,10} &= -0,1445 \pm j\,0,7818, \\ p_{11,12} &= -0,2088 \pm j\,0,4339, \\ p_{13} &= -0,2318. \end{aligned}$$

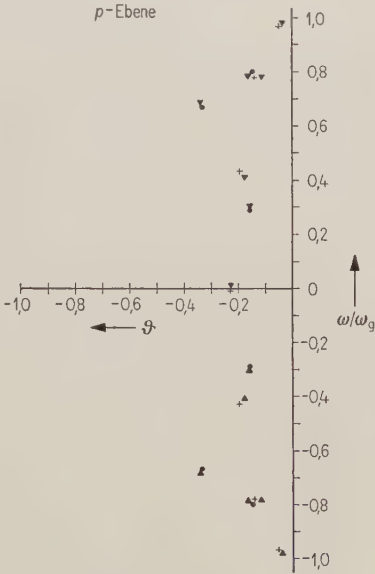


Bild 2. Lage der Nullstellen und Pole der für den Bau des Kettenverstärkers benutzten Näherungslösung des Gleichungssystems;

- Nullstellen,
- ▼ Pole,
- + exakte TSCHEBYSCHEFFSche Pole.

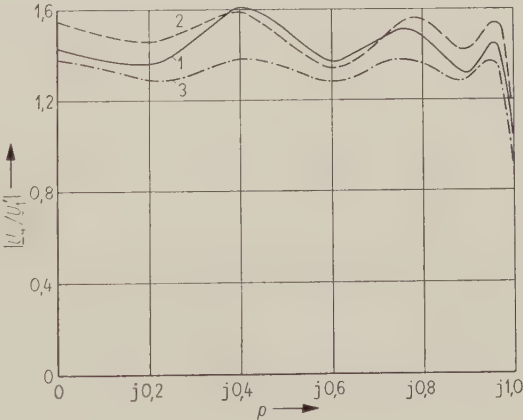


Bild 3. Theoretischer Frequenzgang.

- Kurve 1: Der entsprechend den in Bild 2 dargestellten Nullstellen und Polen berechnete Frequenzgang des gesamten Verstärkers.
- Kurve 2: Frequenzgang ohne Berücksichtigung der Nullstellen und der sie kompensierenden Pole.
- Kurve 3: Frequenzgang bei exakter TSCHEBYSCHEFFScher Dimensionierung, berechnet nach den in Bild 2 dargestellten TSCHEBYSCHEFFSchen Polen.

Die Lage der Nullstellen und Pole ist in Bild 2 und der hieraus berechnete Frequenzgang in Bild 3 (Kurve 1) dargestellt. In Bild 3 ist außerdem noch der Verlauf des Frequenzganges für den Fall aufgetragen (Kurve 2), daß die Nullstellen mit den sie kompensierenden Polen exakt zusammenfallen, also in der Rechnung nicht mehr vorkommen würden. Es ergibt sich, daß die Schwankung dieses Frequenzganges nicht wesentlich von der durch Kurve 1 wiedergegebenen abweicht. Eine Gegenüberstellung mit der exakten TSCHEBYSCHEFFSchen Kurve (Kurve 3, ermittelt aus den in Bild 2 ebenfalls eingezeichneten exakten TSCHEBYSCHEFFSchen Polen) zeigt jedoch, daß die Schwankung der exakten TSCHEBYSCHEFFSchen Kurve beträchtlich geringer ist als die der beiden anderen Kurven. Daraus ist zu schließen, daß die Nullstellen mit den sie kompensierenden Polen so gut zusammenfallen, daß sie den Frequenzgang nicht mehr wesentlich beeinflussen und die Abweichungen von der TSCHEBYSCHEFFSchen Kurve hauptsächlich auf Abweichungen der nicht kompensierten Pole von den TSCHEBYSCHEFFSchen Polen zurückzuführen sind. Wie bei der normalen TSCHEBYSCHEFFSchen Funktion entspricht auch hier der größeren Schwankung ein größerer Verstärkungsgrad.

Ein nochmaliger Versuch, eine größere Genauigkeit bei der Lösung des Gleichungssystems zu erreichen, wurde mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine² nach Fertigstellung des im experimentellen Teil beschriebenen Kettenverstärkers unternommen, indem eine Verminderung des Abstandes der Nullstellen von den sie kompensierenden Polen in der komplexen Frequenzebene angestrebt wurde. Die erzielte Verbesserung gegenüber dem Frequenzgang, wie ihn Bild 3 zeigt, war jedoch zu geringfügig, um den Neubau eines Kettenverstärkers zu rechtfertigen. Dasselbe gilt für einen weiteren Versuch, mit dem eine Verminderung des Abstandes zwischen den nicht kompensierten Polen und den TSCHEBYSCHEFFSchen Polen erreicht werden sollte.

2.4. Berechnung des Frequenzganges des gesamten Verstärkers und der Gitter- und Anodenkette für sich allein

Für eine gute Übereinstimmung der theoretischen Berechnung mit dem experimentellen Verhalten und für die Prüfung des Kettenverstärkers ist es erforderlich, sowohl den theoretischen als auch den tatsächlichen Frequenzgang der Gitter- und Anodenkette für sich allein zu kennen. Nur wenn die experimentell gefundenen Frequenzgänge der einzelnen Ketten mit hinreichender Genauigkeit den entsprechenden theoretischen Kurven folgen, darf auch bei dem gesamten Verstärker eine Übereinstimmung zwischen dem theoretischen und dem tatsächlichen Frequenzgang erwartet werden. Als Übertragungsfunktion für die Gitterkette erhält man

$$\frac{U_4'}{U_1'} = \frac{\varepsilon' \beta'}{(B' + 1 + \beta') [(B' + \varepsilon' + \beta') (C' + \varepsilon') - \varepsilon'^2] - \beta'^2 (C' + \varepsilon')} \quad (16)$$

Der im Nenner stehende Ausdruck ist bereits aus dem Nenner der Übertragungsfunktion des gesamten Verstärkers bekannt. Er ist bis auf eine Konstante mit dem Polynom Y (9) identisch. Die Pole der Übertragungsfunktion der Gitterkette sind also die bereits mitgeteilten Wurzeln des Polynoms Y (15). Der hieraus berechnete Frequenzgang der Gitterkette ist in Bild 6 (Kurve 1) dargestellt.

Die Übertragungsfunktion für die Anodenkette erhält man analog aus der für die Gitterkette, wenn man sämtliche gestrichelten Größen durch ungestrichene ersetzt. Die Wurzeln dieses Polynoms lauten

$$p_{1,2} = -0,0258 \pm j 0,6402,$$

$$p_{3,4} = -0,1204 \pm j 0,2502,$$

$$p_{5,6} = -0,3419 \pm j 0,6725.$$

Den hieraus berechneten Frequenzgang zeigt Bild 7 (Kurve 1). Im experimentellen Teil wird gezeigt werden, inwieweit diese theoretischen Kurven mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen.

2.5. Allgemeine Formeln für die Verstärkung. Verwendungsmöglichkeiten des angewandten Verfahrens der Nullstellenkompensation bei Kettenverstärkern mit beliebig vielen Röhren

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob eine Übertragung der bisher erzielten theoretischen Ergebnisse auf Kettenverstärker mit mehr als zwei Röhren möglich ist. Eine notwendige Voraussetzung hierfür ist, daß bei Erweiterung des Systems um eine Röhre die Zahl der Unbekannten stets im gleichen Maße zunimmt wie die Zahl der Gleichungen, damit in dem betreffenden Gleichungssystem die Zahl der Gleichungen und der Unbekannten identisch ist.

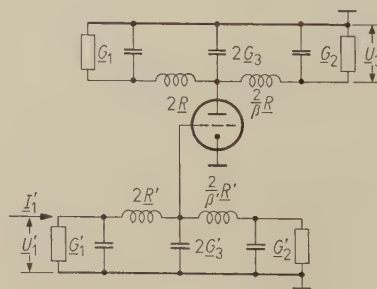


Bild 4. Schaltbild des Kettenverstärkers mit einer Röhre.

Um zu einer Systematik bei der Aufstellung von Gleichungssystemen für Kettenverstärker mit beliebig vielen Röhren zu gelangen, sei zunächst der Fall mit einer Röhre betrachtet (Bild 4). Mit den gleichen Bezeichnungen wie beim Kettenverstärker mit zwei Röhren ergibt sich:

² Vergleiche die Fußnote 1.

für die Gitterkette:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1' \underline{G}_1' + (\underline{U}_1 - \underline{U}_2') \frac{1}{2 \underline{R}'} &= \underline{J}_1', \\ 2 \underline{U}_2' \underline{G}_3' + (\underline{U}_2' - \underline{U}_1') \frac{1}{2 \underline{R}'} + (\underline{U}_2' - \underline{U}_3') \frac{\beta'}{2 \underline{R}'} &= 0, \\ \underline{U}_3' \underline{G}_2' + (\underline{U}_3' - \underline{U}_2') \frac{\beta'}{2 \underline{R}'} &= 0; \end{aligned} \quad (17)$$

für die Anodenkette:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 \underline{G}_1 + (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \frac{1}{2 \underline{R}} &= 0, \\ 2 \underline{U}_2 \underline{G}_3 + (\underline{U}_2 - \underline{U}_1) \frac{1}{2 \underline{R}} + (\underline{U}_2 - \underline{U}_3) \frac{\beta}{2 \underline{R}} &= \underline{S} \underline{U}_2', \\ \underline{U}_3 \underline{G}_2 + (\underline{U}_3 - \underline{U}_2) \frac{\beta}{2 \underline{R}} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Schreibt man diese Gleichungen in Matrizenform und multipliziert wieder mit $2 \underline{R}'$ bzw. $2 \underline{R}$, so erhält man mit den in Gl. (3) aufgeführten Abkürzungen

$$\begin{pmatrix} A' + 1 & -1 & 0 \\ -1 & B' + 1 + \beta' & -\beta' \\ 0 & -\beta' & C' + \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \\ \underline{U}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \underline{J}_1' \underline{R}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} A + 1 & -1 & 0 \\ -1 & B + 1 + \beta & -\beta \\ 0 & -\beta & C + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \underline{S} \underline{R} \underline{U}_2' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \underline{V} = \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1'} &= 2 \underline{S} \underline{R} \frac{\Delta'_{12} \Delta_{24} + \Delta'_{13} \Delta_{34}}{\Delta \Delta'_{11}} = \\ &= \frac{2 \varepsilon \underline{S} \underline{R}}{\Delta} \frac{(C' + \varepsilon') \left(\frac{B'}{\mu'} + \varepsilon' + \beta' \right) - \varepsilon'^2}{\left[(C' + \varepsilon') \left(\frac{B'}{\mu'} + \varepsilon' + \beta' \right) - \varepsilon'^2 \right] (B' + 1 + \beta') - \beta'^2 (C' + \varepsilon')}, \end{aligned} \quad (21)$$

Nach Berechnung von \underline{U}_1' und \underline{U}_3 erhält man für \underline{V} :

$$\begin{aligned} \underline{V} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1'} &= 2 \underline{S} \underline{R} \frac{\Delta'_{12} \Delta_{23}}{\Delta \Delta'_{11}} = \\ &= 2 \underline{S} \underline{R} \frac{\beta (A + 1) (C' + \beta')}{\{ [(A + 1) (B + 1 + \beta) - 1] (C + \beta) - \beta^2 (A + 1) \} [(B' + 1 + \beta') (C' + \beta') - \beta'^2]}. \end{aligned} \quad (19)$$

worin die $\Delta_{\mu\nu}$ die Unterdeterminanten von

$$\Delta = \begin{vmatrix} A + 1 & -1 & 0 \\ 1 & B + 1 + \beta & -\beta \\ 0 & -\beta & C + \beta \end{vmatrix} \quad (20)$$

in der üblichen Indizierung bedeuten mögen. Das gleiche gilt entsprechend für die gestrichenen Determinanten.

Δ ergibt ein Polynom sechsten Grades in p , aus dem noch p ausgeklammert und gegen das p in $\underline{R} = pL$ gekürzt werden kann, es bleibt ein Polynom fünften Grades zurück. Im Zähler und Nenner stehen ferner noch je ein Polynom vierten Grades.

Mithin sind zur Kompensation der Nullstellen des Zählers vier Gleichungen erforderlich, zur TSCHEBYSCHESCHEN Dimensionierung der restlichen fünf Pole weitere fünf Gleichungen, insgesamt also neun. An Unbekannten stehen, wenn man für A , B und C die Symbole der Schaltelemente einsetzt, zur Verfügung:

$$L', C_2', C_3', R_2', \beta'; L, C_1, C_2, C_3, R_1, R_2 \text{ und } \beta,$$

also zwölf Größen. Die Schaltelemente C_3 und R_2' sind jedoch aus früher erläuterten Gründen (Abschnitt 2.1) bereits festgelegt. Über eine weitere Unbekannte kann also bei diesem Verstärker noch frei verfügt werden, um die erforderliche Zahl von neun Unbekannten für das System von neun Gleichungen zu erreichen.

Bei dem Kettenverstärker mit zwei Röhren hatten sich dreizehn Gleichungen ergeben; nach Abzug der bereits festgelegten Größen C_3 und R_1' verblieben nur noch zwölf Unbekannte, wozu wir noch das Schwankungsmaß λ hinzugenommen hatten. Die Zahl der Gleichungen hat also im Verhältnis zum Verstärker mit einer Röhre um vier zugenommen, die Zahl der Unbekannten jedoch nur um drei. Wenn man an Stelle von λ , wie es prinzipiell möglich ist, eine andere Unbekannte durch unterschiedliche Dimensionierung der Gitterkapazitäten einführt (Abschnitt 2.1), indem man z. B. den Leitwert der Gitterkapazität der zweiten Röhre jetzt $2 \underline{G}_3'/\mu'$ nennt, so erhält man für die Verstärkung den Ausdruck

mit Δ nach Gl. (5).

Es soll nun untersucht werden, ob sich ähnliche Verhältnisse auch beim Übergang zum Kettenverstärker mit drei Röhren ergeben. Dazu muß zunächst seine Verstärkung berechnet werden, wobei

im folgenden die Gitterkapazitäten von vornherein verschieden angesetzt sind.

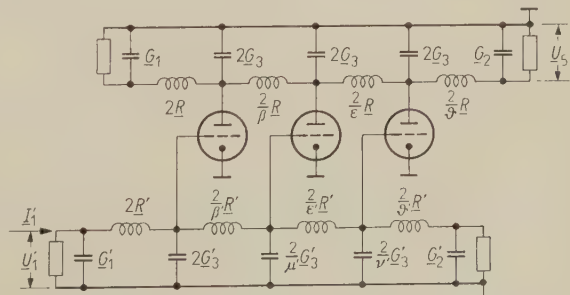


Bild 5. Schaltbild des Kettenverstärkers mit drei Röhren.

Auf Grund des Schaltbildes (Bild 5) ergibt sich:

für die Gitterkette:

$$\begin{aligned} \underline{U}'_1 \underline{G}'_1 + (\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2) \frac{1}{2 \underline{R}'} &= \underline{J}'_1, \\ 2 \underline{U}'_2 \underline{G}'_3 + (\underline{U}'_2 - \underline{U}'_1) \frac{1}{2 \underline{R}'} + (\underline{U}'_2 - \underline{U}'_3) \frac{\beta'}{2 \underline{R}'} &= 0, \\ \frac{2}{\mu'} \underline{U}'_3 \underline{G}'_3 + (\underline{U}'_3 - \underline{U}'_2) \frac{\beta'}{2 \underline{R}'} + (\underline{U}'_3 - \underline{U}'_4) \frac{\varepsilon'}{2 \underline{R}'} &= 0, \\ \frac{2}{\nu'} \underline{U}'_4 \underline{G}'_3 + (\underline{U}'_4 - \underline{U}'_3) \frac{\varepsilon'}{2 \underline{R}'} + (\underline{U}'_4 - \underline{U}'_5) \frac{\vartheta'}{2 \underline{R}'} &= 0, \\ \underline{U}'_5 \underline{G}'_2 + (\underline{U}'_5 - \underline{U}'_4) \frac{\vartheta'}{2 \underline{R}'} &= 0; \end{aligned} \quad (22)$$

für die Anodenkette:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 \underline{G}_1 + (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \frac{1}{2 \underline{R}} &= 0, \\ 2 \underline{U}_2 \underline{G}_3 + (\underline{U}_2 - \underline{U}_1) \frac{1}{2 \underline{R}} + (\underline{U}_2 - \underline{U}_3) \frac{\beta}{2 \underline{R}} &= S \underline{U}'_2, \\ 2 \underline{U}_3 \underline{G}_3 + (\underline{U}_3 - \underline{U}_2) \frac{\beta}{2 \underline{R}} + (\underline{U}_3 - \underline{U}_4) \frac{\varepsilon}{2 \underline{R}} &= S \underline{U}'_3, \\ 2 \underline{U}_4 \underline{G}_3 + (\underline{U}_4 - \underline{U}_3) \frac{\varepsilon}{2 \underline{R}} + (\underline{U}_4 - \underline{U}_5) \frac{\vartheta}{2 \underline{R}} &= S \underline{U}'_4, \\ \underline{U}_5 \underline{G}_2 + (\underline{U}_5 - \underline{U}_4) \frac{\vartheta}{2 \underline{R}} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Schreibt man diese Gleichungen in Matrizenform und multipliziert wieder mit $2 \underline{R}'$ bzw. $2 \underline{R}$, so erhält man mit den in Gl. (3) aufgeführten Abkürzungen

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A' + 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & B' + 1 + \beta' & -\beta' & 0 & 0 \\ 0 & -\beta' & \frac{B'}{\mu'} + \beta' + \varepsilon' & -\varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon' & \frac{B'}{\nu'} + \varepsilon' + \vartheta' & -\vartheta' \\ 0 & 0 & 0 & -\vartheta' & C' + \vartheta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \\ \underline{U}'_3 \\ \underline{U}'_4 \\ \underline{U}'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \underline{J}'_1 \underline{R}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{bzw.} \quad &\begin{pmatrix} A + 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & B + 1 + \beta & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & B + \beta + \varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & B + \varepsilon + \vartheta & -\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & -\vartheta & C + \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 S \underline{R} \underline{U}'_2 \\ 2 S \underline{R} \underline{U}'_3 \\ 2 S \underline{R} \underline{U}'_4 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Berechnung von \underline{U}'_1 und \underline{U}_5 erhält man für \underline{V} :

$$\begin{aligned} \underline{V} = \frac{\underline{U}_5}{\underline{U}'_1} &= 2 S \underline{R} \frac{\Delta'_{12} \Delta_{25} + \Delta'_{13} \Delta_{35} + \Delta'_{14} \Delta_{45}}{\Delta \Delta'_{11}} = \frac{2 S \underline{R}}{\Delta \Delta'_{11}} \left\{ \left[\left(\frac{B'}{\mu'} + \beta' + \varepsilon' \right) \left(\frac{B'}{\nu'} + \varepsilon' + \vartheta' \right) - \varepsilon'^2 \right] (C' + \vartheta') - \right. \\ &\quad \left. - \vartheta'^2 \left(\frac{B'}{\mu'} + \beta' + \varepsilon' \right) \right\} (A + 1) \varepsilon \beta \vartheta + \\ &\quad + \frac{2 S \underline{R}}{\Delta \Delta'_{11}} \beta' \left[\left(\frac{B'}{\nu'} + \varepsilon' + \vartheta' \right) (C' + \vartheta') - \vartheta'^2 \right] [(A + 1) (B + 1 + \beta) - 1] \varepsilon \vartheta + \\ &\quad + \frac{2 S \underline{R}}{\Delta \Delta'_{11}} \varepsilon' \beta' (C' + \vartheta') \{ [(A + 1) (B + 1 + \beta) - 1] (B + \beta + \varepsilon) - \beta^2 (A + 1) \} \vartheta. \end{aligned} \quad (24)$$

Δ ist die Determinante der Anodenkette, und für Δ'_{11} gilt:

$$\begin{aligned} \Delta'_{11} &= \left\{ \left[(C' + \vartheta') \left(\frac{B'}{\nu'} + \varepsilon' + \vartheta' \right) - \vartheta'^2 \right] \left(\frac{B'}{\mu'} + \beta' + \varepsilon' \right) - \varepsilon'^2 (C' + \vartheta') \right\} \times \\ &\quad \times (B' + 1 + \beta') - \beta'^2 \left[(C' + \vartheta') \left(\frac{B'}{\nu'} + \varepsilon' + \vartheta' \right) - \vartheta'^2 \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Δ ergibt ein Polynom zehnten Grades in p , aus dem wieder p ausgeklammert und gegen das p in $R = pL$ gekürzt werden kann, so daß jetzt ein Polynom neunten Grades zurückbleibt. Sowohl das noch im Nenner als auch das im Zähler stehende Polynom ist achten Grades, und zur Kompensation der Nullstellen sind in diesem Fall acht Gleichungen erforderlich, während die restlichen neun Pole nach TSCHEBYSCHEFF dimensioniert werden müssen. Insgesamt ergeben sich also siebzehn Gleichungen,

gegenüber dreizehn beim Kettenverstärker mit zwei Röhren. Als Unbekannte sind hinzugekommen μ' , ϑ' und ϑ . Damit hat sich die Zahl der Unbekannten wiederum nur um drei erhöht, die Zahl der Gleichungen jedoch um vier.

Es ist offensichtlich, daß dieselben Verhältnisse bei jeder Zunahme um eine Röhre auftreten, denn die Zahl der Gleichungen, die mit der Zahl der Pole des Verstärkers identisch ist, muß pro Röhre stets um vier zunehmen, da sowohl in der Anoden-

als auch in der Gitterkette dann zwei neue zusätzliche Pole auftreten. Andererseits kommen in der Gitterkette je eine zusätzliche, von den übrigen verschiedene Gitterkapazität und Induktivität, in der Anodenkette nur eine zusätzliche Induktivität, also insgesamt drei Schaltelemente hinzu, solange man an der gleichen Dimensionierung der Anodenkapazitäten festhält, um die Verstärkung nicht zu vermindern. Diese Schwierigkeit läßt sich jedoch ohne Herabsetzung der Verstärkung umgehen, wenn man z. B. Kopplungen zwischen den Induktivitäten der Anoden- oder Gitterkette einführt [11], deren Pole oder Nullstellen weit außerhalb des Übertragungsbereiches liegen und daher in der Rechnung zu vernachlässigen sind. Man könnte auch andere Schaltelemente hinzufügen, die mit den physikalischen Forderungen an den Verstärker verträglich sind und gleichzeitig zusätzliche Unbekannte für das jeweilige Gleichungssystem liefern, ohne eine Vermehrung der Pol- und Nullstellenzahl und damit des Grades der Polynome zu bewirken. Es wäre allerdings auch noch zu untersuchen, ob der durch eventuell unterschiedliche Dimensionierung (Erhöhung) der Kapazitäten in der Anodenkette hervorgerufene Verlust an Verstärkung tatsächlich den durch die TSCHEBYSCHEFFSche Dimensionierung erhaltenen Gewinn vollständig oder zu einem wesentlichen Teil aufwiegt.

Aus dem Vergleich zwischen den Verstärkern mit einer Röhre, mit zwei und drei Röhren ist zu erkennen, daß der Aufbau der Formeln für die Verstärkung offenbar einer ganz allgemeinen Regel folgt, die bei Verwendung von Determinanten besonders übersichtlich wird. Die Formeln seien hier nochmals zusammengestellt:

eine Röhre:

$$\underline{V} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = 2S \underline{R} \frac{\Delta'_{12} \Delta_{23}}{\Delta \Delta'_{11}}, \quad (19)$$

zwei Röhren:

$$\underline{V} = \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = 2S \underline{R} \frac{\Delta'_{12} \Delta_{24} + \Delta'_{13} \Delta_{34}}{\Delta \Delta'_{11}}, \quad (21)$$

drei Röhren:

$$\underline{V} = \frac{\underline{U}_5}{\underline{U}_1} = 2S \underline{R} \frac{\Delta'_{12} \Delta_{25} + \Delta'_{13} \Delta_{35} + \Delta'_{14} \Delta_{45}}{\Delta \Delta'_{11}}. \quad (24)$$

Zunächst fällt auf, daß im Nenner stets die Determinanten Δ (Anodenkette) und Δ'_{11} (Unterdeterminante, die durch Fortlassen der ersten Spalte und Zeile der Gitterketten-Determinante entsteht) aufgeführt sind, während im Zähler eine Summe von Produkten von Unterdeterminanten steht, deren Summandenzahl gleich der Anzahl der Röhren (verbindende Stromwege zwischen den Ketten) ist. Die Unterdeterminanten sind dabei so aufgebaut, daß ihre Indizes in einer allgemeinen Formel für die Verstärkung eines Kettenverstärkers mit n Röhren angegeben werden können:

$$\underline{V} = \frac{\underline{U}_{n+2}}{\underline{U}_1} = 2S \underline{R} \frac{\Delta'_{12} \Delta_{2, n+2} + \Delta'_{13} \Delta_{3, n+2} + \Delta'_{14} \Delta_{4, n+2} + \dots + \Delta'_{1n} \Delta_{n, n+2} + \Delta'_{1, n+1} \Delta_{n+1, n+2}}{\Delta \Delta'_{11}}. \quad (26)$$

3. Experimentelle Untersuchungen

3.1. Der Aufbau des Kettenverstärkers

Zur experimentellen Prüfung des theoretisch ermittelten Frequenzganges wurde ein Kettenverstärker mit zwei Röhren 6AK5 aufgebaut, dessen Schaltelemente den berechneten Werten entsprachen. Hierbei erwies es sich als notwendig, das zwischen Gitter- und Anodenkette eingefügte Abschirmblech an seiner Berührungsstelle mit dem Chassis möglichst vollständig zu verlöten, da sonst leicht Chassisschleifen den Frequenzgang des Verstärkers verfälschen könnten. Es ist ferner vorteilhaft, die Gitterkette mit einem Metallgehäuse als Abschirmung zu umgeben.

Die Messungen wurden im Bereich zwischen 30 und 300 MHz vorgenommen, und zwar genügten hierbei in einiger Entfernung von steilen Maxima oder Minima im allgemeinen Abstände von 10 zu 10 MHz.

3.2. Experimentelle Nachprüfung des Frequenzganges von Gitter- und Anodenkette

Bei der Ermittlung des Frequenzganges der einzelnen Ketten wurde die Eingangsspannung konstant gehalten. Es stellte sich heraus, daß die geringsten Veränderungen der in der Gitterkette verwendeten Kapazitäten und Induktivitäten einen großen Einfluß auf den Frequenzgang hatten, daß insbesondere eine Vergrößerung der Kapazitäten eine Überhöhung der Maxima und eine Verschiebung nach niedrigen Frequenzen bewirkte. Abweichungen der Induktivitäten vom vorgeschriebenen Wert machten sich durch Verzerrungen des gesamten Frequenzganges sowie durch Auftreten zusätzlicher Maxima bemerkbar. Nach zahlreichen Versuchen gelang es, den experimentell gefundenen Frequenzgang der theoretisch geforderten Kurve weitgehend anzugleichen (Bild 6).

Wesentlich einfacher waren die entsprechenden Untersuchungen und Messungen an der Anodenkette. Die hier verwendeten Induktivitäten waren durchschnittlich um eine Zehnerpotenz größer als in der Gitterkette, und damit waren die prozen-

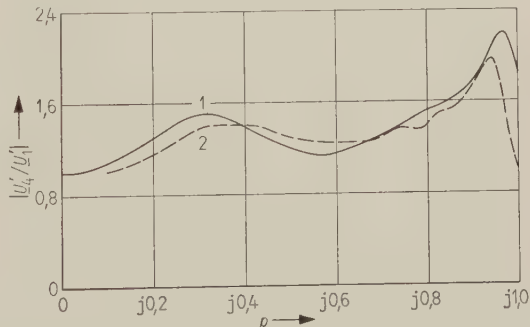


Bild 6. Frequenzgang der Gitterkette;
Kurve 1: theoretisch,
Kurve 2: experimentell.

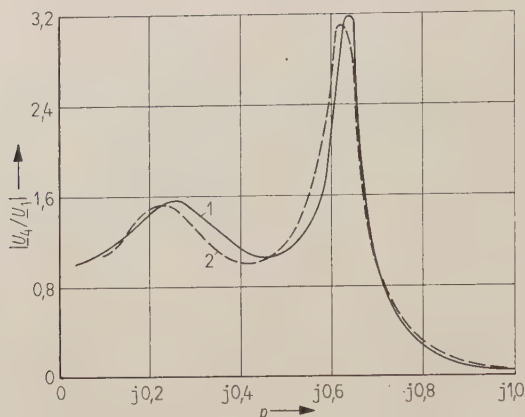


Bild 7. Frequenzgang der Anodenkette;
Kurve 1: theoretisch,
Kurve 2: experimentell.

tualen Fehler bei der Dimensionierung dieser Spulen wesentlich geringer als dort. Zur Angleichung des experimentell gefundenen Frequenzganges an die theoretische Kurve (Bild 7) waren nur geringfügige Änderungen an den Schaltelementen und nur wenige Messungen notwendig. Allerdings war es erforderlich, den Widerstand R_2 etwa 20% größer (400 Ω) zu wählen, als die Theorie es fordert, um die Höhe des theoretischen Maximums bei $p = j0,64$ zu erreichen. Auf diese Weise ließ sich die in der Kette vorhandene Dämpfung im wesentlichen kompensieren.

Im allgemeinen aber war die Übereinstimmung zwischen der theoretischen und der experimentell gefundenen Kurve, siehe Bild 7, bei der Anodenkette besser als bei der Gitterkette. Da die Eingangsspannung konstant gehalten wurde, waren die Schaltelemente R_1 und C_1 natürlich nicht in diese Überprüfung einbezogen. Sie kamen auch bei der Berechnung des theoretischen Frequenzganges der Anodenkette nicht in Betracht.

3.3. Experimenteller Verlauf des Frequenzganges des gesamten Verstärkers

Nachdem die Frequenzgänge der beiden Ketten so gut wie möglich den theoretischen Kurven angeglichen worden waren, wurde der Frequenzgang des

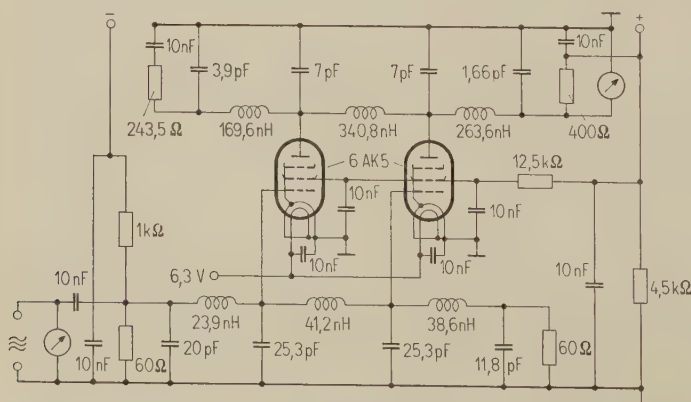


Bild 8. Schaltbild des Kettenverstärkers mit zwei Röhren 6AK5 einschließlich Gleichstromzuführungen.

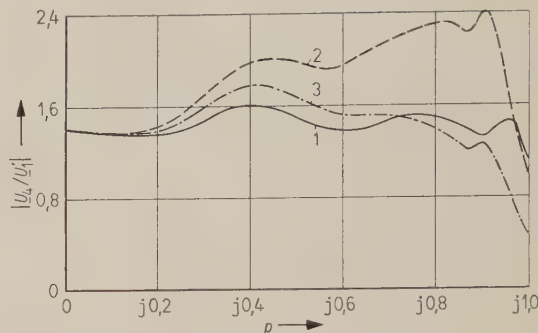


Bild 9. Frequenzgang des gesamten Verstärkers.

Kurve 1: Theoretisch (identisch mit Bild 3, Kurve 1).

Kurve 2: Experimentell gefundener Frequenzgang. Die TSCHEBYSCHEFFSchen Maxima werden von einem Anstieg der gesamten Verstärkung mit der Frequenz überlagert.

Kurve 3: Scherung von Kurve 2 mit dem Verstärkungsanstieg bei zunehmender Frequenz (Bild 11).

gesamten Verstärkers gemessen. (Das Schaltbild einschließlich Gleichstromzuführungen zeigt Bild 8.) Bereits die ersten Messungen zeigten, daß die drei gemäß der TSCHEBYSCHEFFSchen Dimensionierung zu erwartenden Maxima auftraten und tatsächlich in unmittelbarer Nähe der von der Theorie geforderten Frequenzen lagen. Darüber hinaus machte sich, den TSCHEBYSCHEFFSchen Maxima überlagert, ein Anstieg der gesamten Verstärkung mit der Frequenz bemerkbar, der sich zunächst nicht erklären ließ (Bild 9, Kurve 2). Das Auftreten der TSCHEBYSCHEFFSchen Maxima und Minima in der Nähe der theoretischen Frequenzen (Bild 9, Kurve 1) bewies die richtige Dimensionierung der Schaltelemente R_1 und C_1 .

3.4. Einbau einer einzelnen Röhre in dasselbe Chassis, Messung des Frequenzganges

Die Vermutung lag nahe, daß der unerwartete Verstärkungsanstieg mit der Frequenz entweder durch den Aufbau der Röhre im Chassis oder durch Vorgänge in der Röhre selbst verursacht sein könnte. Deshalb wurde im selben Chassis eine einzelne Röhre 6AK5 aufgebaut, in deren Anodenleitung ein ungewandelter Schichtwiderstand von 50 Ω eingelötet war (Bild 10), und die Wechselspannung unmittelbar zwischen dem Sockelstift der Anode und dem Chassis abgegriffen. Gemessen wurde tatsächlich ein erheblicher Anstieg von $U_{\text{Ausg}}/U_{\text{Eing}}$ (zwischen 30 und 300 MHz um den Faktor 2,2

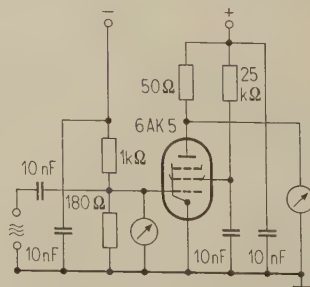


Bild 10. Aufbau einer einzelnen Röhre 6AK5 zur Messung des Verstärkungsanstiegs mit zunehmender Frequenz.

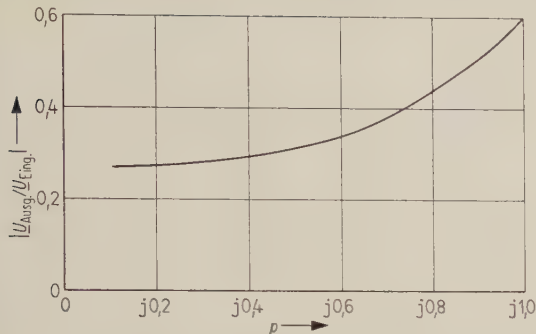


Bild 11. Gemessener Verstärkungsanstieg einer einzelnen Röhre 6AK5 (Aufbau nach Bild 10) mit zunehmender Frequenz.

(Bild 11)), obwohl alle Gleichstromzuleitungen, insbesondere die Schirmgitterzuleitung, wieder sorgfältig durch Scheibenkondensatoren mit sehr kurzen Anschlußfahnen abgeblockt waren. Durch Scherung dieses Anstieges mit Kurve 2 von Bild 9 ließ sich ein Frequenzgang ermitteln (Bild 9, Kurve 3), der dem theoretischen (Bild 9, Kurve 1) etwa entsprach und nur bei sehr hohen Frequenzen einen gewissen Abfall zeigte.

Zunächst wurde überprüft, ob der Verstärkungsanstieg mit der eventuellen Kopplung zwischen Gitter- und Anodenzuleitung im Sockel und in der Röhre selbst sowie mit der induktiven Wirkung der Röhren- und Sockelstifte zusammenhängen könnte. Um dies zu prüfen, wurde außerhalb des bisherigen Aufbaues und ohne Verwendung eines Sockels ein dünnes Messingblech als Abschirmung zwischen Gitter- und Anodenstift bis an den Glaskörper der Röhre geschoben und die Stifte für die Kathoden- und Heizungszuführungen direkt mit diesem Blech verlötet bzw. auf kürzestem Wege galvanisch verbunden. Auf die anderen Stifte der Röhre wurden kleine Kontaktfedern aufgesetzt und die übrigen Schaltelemente unmittelbar daran gelötet. Ferner wurde auf die Röhre noch eine Abschirmhülse gesetzt und mit dem erwähnten Messingblech verlötet. Außerdem wurden wieder die Gleichstromzuführungen abgeblockt. Bei diesem Aufbau erreichte der Verstärkungsanstieg zwischen 30 und 300 MHz nur noch den Faktor 1,6, womit zwar ein Fortschritt erreicht, aber noch keine endgültige Lösung des Problems gefunden war.

Weiterhin wurde vermutet, daß die verwendeten Abblockkondensatoren von 10 nF trotz kürzester Anschlußfahnen immer noch eine störende Induktivität besitzen. Es wurde daher ein Plattenkondensator von etwa 100 pF (12 cm², Dielektrikum Glimmer) gebaut und parallel zu mehreren Abblockkondensatoren von je 10 nF zwischen Anodenzuleitung und Chassis eingelötet. Nun konnte erwartet werden, daß die Induktivität der Summe dieser Abblockkondensatoren auf ein Minimum reduziert war. Der Verstärkungsanstieg zwischen 30 und 300 MHz sank jetzt auf 1,35.

Weitere Versuche mit diesem Plattenkondensator zeigten, daß die ihm parallelgeschalteten keramischen Abblockkondensatoren nicht als Kapazitäten, sondern deren auf 1 bis 2 mm verkürzte Anschlußfahnen als Induktivitäten wirkten und zusammen mit dem Plattenkondensator einen Schwingungskreis bildeten, dessen Resonanzfrequenz von der Dimensionierung des Plattenkondensators und der Induktivität der keramischen Kondensatoren abhing. Für unsere Messungen erschien es am geeignetsten, die Resonanzfrequenz unterhalb von 30 MHz zu legen, allerdings mußte somit auf den Vergleich zwischen experimentellem und theoretischem Frequenzgang unterhalb 30 MHz verzichtet werden. Ob dies jedoch dem jeweiligen Zweck des Verstärkers am besten entspricht, wäre bei einer endgültigen Ausführung erneut zu überlegen. Aber auch damit konnte der Verstärkungsanstieg zwischen 30 und 300 MHz nicht beseitigt werden. Vielmehr verblieb der von der Lage der Resonanzfrequenz unabhängige Anstieg, der sich nicht erklären ließ.

Die oben geschilderte Abschirmung zwischen Gitter- und Anodenstift der Röhre sowie die Verminderung ihrer Induktivitäten durch unmittelbares Anlöten der Schaltelemente an die auf die Stifte gesteckten Federn hatte bereits eine Verminderung des Verstärkungsanstieges ergeben. Die Vermutung lag nun nahe, daß die Zuführungen zu den einzelnen Elektroden innerhalb der Röhre ebenfalls Kopplungen hervorrufen oder ihre Induktivitäten den Frequenzgang beeinflussen, insbesondere wurde dies im Gitterkreis vermutet. Die Nachprüfung konnte hier nur rechnerisch erfolgen. Wenn man zwischen der mit dem Diodenvoltmeter gemessenen Eingangsspannung $\underline{U}_{\text{Eing}}$ und der unmittelbar zwi-

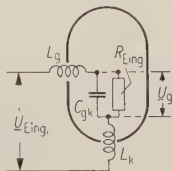


Bild 12. Ersatzschaltbild zur Berechnung von $\underline{U}_{\text{Eing}}/\underline{U}_g$.

schen Gitter und Kathode liegenden Spannung \underline{U}_g unterscheidet und die Zuleitungsinduktivitäten L_k und L_g sowie den Eingangswiderstand R_{Eing} einführt, so erhält man für $\underline{U}_{\text{Eing}}$ und \underline{U}_g (Bild 12)

$$\underline{U}_{\text{Eing}} = \underline{I} \left[j\omega(L_g + L_k) + \frac{R_{\text{Eing}}/j\omega C_{gk}}{R_{\text{Eing}} + \frac{1}{j\omega C_{gk}}} \right],$$

$$\underline{U}_g = \underline{I} \frac{R_{\text{Eing}}}{R_{\text{Eing}} + \frac{1}{j\omega C_{gk}}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $L_g + L_k = L$ und bilden $\underline{U}_{\text{Eing}}/\underline{U}_g$, so ergibt sich

$$\frac{\underline{U}_{\text{Eing}}}{\underline{U}_g} = \frac{j\omega L \left(R_{\text{Eing}} + \frac{1}{j\omega C_{gk}} \right) + \frac{R_{\text{Eing}}}{j\omega C_{gk}}}{\frac{R_{\text{Eing}}}{j\omega C_{gk}}} =$$

$$= 1 - \omega^2 C_{gk} L + \frac{j\omega L}{R_{\text{Eing}}}.$$

Vom elektronischen Eingangswiderstand R_{Eing} ist bekannt [12], daß er dem reziproken Quadrat der Frequenz proportional ist ($R_{\text{Eing}} = k/\omega^2$); er beträgt 8 kΩ für die Röhre 6AK5 bei 100 MHz. Hieraus folgt $k = 3,16 \cdot 10^{21} \Omega \text{ s}^{-2}$, und die Eingangswiderstände für 30 bzw. 300 MHz berechnen sich zu $0,89 \cdot 10^5 \Omega$ bzw. $0,89 \cdot 10^3 \Omega$. Die Induktivitäten der Gitter- und Kathodenzuführung innerhalb der Röhre konnten bei einer Drahtlänge von etwa 11 mm und einem Durchmesser von 0,5 mm zu je 8 nH (für gerade Drähte) abgeschätzt werden. Dabei mußte jedoch berücksichtigt werden, daß die Röhre 6AK5 zwei Kathodenzuführungen besitzt; daher wurde für L_k nur 4 nH eingesetzt, für L also insgesamt 12 nH. Mit $C_{gk} = 4 \text{ pF}$ war \underline{U}_g bei 30 MHz nur um 1,6₀₀ größer als $\underline{U}_{\text{Eing}}$, mithin konnte $\underline{U}_g \approx \underline{U}_{\text{Eing}}$ gesetzt werden. Bei 300 MHz ergab sich jedoch bereits $\underline{U}_g/\underline{U}_{\text{Eing}} = 1,20$, und da die Induktivität der Zuleitungen infolge der gebogenen Drähte sicher größer ist als die hier für den geraden Draht berechnete, z. B. um etwa 50%, ließe sich der Faktor 1,35 erreichen.

3.5. Chassisneubau unter Berücksichtigung der nach Abschnitt 3.4 gewonnenen Erkenntnisse. Prüfung einer einzelnen Röhre in diesem Aufbau

Auf Grund der gewonnenen Erfahrungen wurde nochmals ein Kettenverstärker-Chassis gebaut, um damit den Frequenzgang einer einzelnen Röhre zu untersuchen, jedoch diesmal ohne den sonst üblichen keramischen Röhrensockel zu verwenden. An dessen Stelle wurden — entsprechend den Stiften der Röhre — Löcher in das Chassisblech gebohrt, wobei die Löcher, die die Kathodenstifte und einen Heizungstift der Röhre aufnehmen sollten, so eng gebohrt waren, daß die Röhre mechanisch fest saß. Um einen absolut sicheren Kontakt zu gewährleisten, waren kleine Fe-

dern, in die die Röhrenstifte hineinragten, hinter den Löchern angebracht und mit dem Chassis verlötet. Die Löcher für die übrigen Röhrenstifte erhielten einen größeren Durchmesser. Auch auf diese Röhrenstifte wurden, vom Chassis durch ein Stück Glimmer isoliert, kleine Federn aufgesteckt, an die die weiteren Schaltelemente angelötet werden konnten. Durch den Wegfall des Röhrensockels brauchte das Abschirmblech nicht mehr zwischen Gitter- und Anodenseite unterhalb der Röhre ausgespart zu werden, sondern konnte auch dort mit dem Chassis verlötet werden.

Der Plattenkondensator wurde so angebracht, daß, durch ein Stück Glimmer isoliert, ein weiteres, etwas schmaleres Blech an der Anodenseite auf das Abschirmblech aufgesetzt wurde. Da eine verhältnismäßig große Fläche verfügbar war, konnte eine Kapazität von etwa 1000 pF erreicht werden. (Es wäre ohne weiteres möglich, auch auf der Gitterseite kleine zusätzliche Kondensatoren anzubringen und diese an Stelle der keramischen Scheibenkondensatoren von etwa 20 pF der schädlichen Gitterkapazität parallelzuschalten und damit die Induktivität des zusätzlichen Kondensators zu vermindern.) Die Röhre wurde wieder mit einer Abschirmhülse versehen und der Verstärkungsanstieg mit der Frequenz dieses Aufbaus gemessen. Wie erwartet ergab sich, wie bei dem provisorischen Aufbau unter Verwendung des Abschirmbleches und Verschiebung der Resonanzfrequenz außerhalb des Bereiches zwischen 30 und 300 MHz, ein Anstieg von etwa 1,35 zwischen den genannten Frequenzen.

4. Vergleich der erzielten Verstärkung mit der anderer Kettenverstärker. Zusammenschaltung mehrerer Kettenverstärkerstufen in Kaskade

Aus der allgemeinen Formel (4) für die Verstärkung berechnet man leicht die Gleichstromverstärkung ($p = 0$) zu

$$V = \frac{2S}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

Das Einsetzen der numerischen Werte von R_1 und R_2 aus Abschnitt 2.3 sowie der Steilheit mit $S = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ A/V}$ führt zu

$$V = 1,425$$

in Übereinstimmung mit dem in Bild 3 dargestellten Frequenzgang. Die Berechnung eines nach dem bisher üblichen Verfahren gebauten Kettenverstärkers, dessen Gitter- und Anodenkette also normale Tiefpässe sind, ergibt für den Nennwert des Wellenwiderstandes

$$Z = 1/\omega_g C,$$

also mit $\omega_g = 1,885 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ und $C = 3,5 \text{ pF}$ (da zwei Glieder aneinanderstoßen, die Hälfte der gesamten schädlichen Anodenkapazität):

$$Z = 151,57 \Omega.$$

Für die Verstärkung $V = nS \cdot Z/2 = SZ$ ($n = 2$ Röhren) folgt hieraus

$$V = 5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 151,57 = 0,773,$$

d. h. die Dimensionierung nach TSCHEBYSCHEFF hat die Verstärkung um den Faktor $1,425/0,773 = 1,84$ je Stufe erhöht.

Sollen mehrere Kettenverstärkerstufen in Kaskade zusammengeschaltet und dabei ein Transformationsglied zwischen der Anodenkette der vorhergehenden und der Gitterkette der folgenden Stufe vermieden werden, so müßten diese beiden Ketten

den gleichen Nennwert Z haben. Da aber die schädliche Gitterkapazität im allgemeinen größer ist als die Anodenkapazität, hat der Nennwert Z_a der Anodenkette bei gleicher Grenzfrequenz einen größeren Wert als Z_g (Nennwert der Gitterkette). Setzt man Z_a durch Erhöhung der schädlichen Anodenkapazität auf Z_g herab, so sinkt die Verstärkung von $V \approx Z_a$ auf $V \approx Z_g$. Verwendet man jedoch ein Transformationsglied zwischen beiden Ketten, so vermindert sich die Verstärkung nur um das Übersetzungsverhältnis $\sqrt{Z_g/Z_a}$ auf den Wert $\sqrt{Z_g Z_a}$ und ist mithin größer als bei Herabsetzung von Z_a auf Z_g und Einsparung des Transformationsgliedes.

Abschließend darf gesagt werden, daß mit den Untersuchungen in dieser Arbeit das Problem der TSCHEBYSCHEFFSchen Dimensionierung des Frequenzganges eines Kettenverstärkers unter Verwendung des Nullstellenkompensationsverfahrens prinzipiell gelöst ist. Dieses Verfahren kann unter Beachtung der im Abschnitt 2.5 erläuterten Gesichtspunkte auf Kettenverstärker mit beliebig vielen Röhren angewendet werden, jedoch sind die dann zu bewältigenden Gleichungssysteme noch komplizierter als in der vorliegenden Arbeit, deren Lösung nur mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen möglich ist.

Dem Institut für Rundfunktechnik, Hamburg, danke ich für die Bereitstellung des Arbeitsplatzes und der Hilfsmittel, Herrn Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. H. G. MÖLLER und Herrn Dr. F. BELOW für viele anregende Diskussionen. Herrn Prof. Dr. K. H. WEISE und seinen Mitarbeitern (Universität Kiel) bin ich für die numerischen Näherungslösungen des bei der Berechnung des Kettenverstärkers mit zwei Röhren auftretenden Gleichungssystems, die z.T. unter Verwendung einer elektronischen Rechenmaschine ermittelt wurden, sehr zu Dank verpflichtet.

Schrifttum

- [1] FELDTELLER, R., Einführung in die Theorie der Hochfrequenz-Bandfilter, 4. Aufl. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1953, S. 124 ff.
- [2] PERCIVAL, W. C., Improvements in and relating to thermionic valve circuits. Brit. Pat. 460 562, 24. 7. 1935.
- [3] GINTON, E. L., HEWLETT, W. R., JASBERG, J. H. und NOE, J. D., Distributed amplification. Proc. Inst. Radio Engrs. **36** [1948], 956–969.
- [4] MOORE, A. D., Synthesis of distributed amplifiers for prescribed amplitude response. Stanford Univ. Electronic Res. Lab., Tech. Rep. Nr. 53, September 1952.
- [5] PEDERSON, D. O., The distributed pair. Transact. Inst. Radio Engrs. PGCT-1 [1952], Dez., 57–67.
- [6] DEMUTH, H. B., An investigation of the iterative synthesis of distributed amplifiers. Stanford Univ. Electronic Res. Lab., Tech. Rep. Nr. 77, August 1954.
- [7] CARYOTAKIS, G. A., DEMUTH, H. B. und MOORE, A. D., Iterative network synthesis. Symposium: Network design on circuit theory. Inst. Radio Engrs. Conv. Rec., 1955 National Convention, Part 2: Circuit Theory I (Session 7), S. 9–16.
- [8] GONTERMANN, A., Läßt sich der Verstärkungsfaktor eines Kettenleiter-Verstärkers bei gegebenen Schwankungen innerhalb des Durchlaßbereiches vergrößern? Unveröffentlichte Diplom-Arbeit, Universität Hamburg 1954.
- [9] NISSEN, H. H. und HÄNDLER, W., Das Einschwingverhalten von Filtern mit charakteristischem Amplitudengang. A.E.Ü. **9** [1955], 74–80.
- [10] VAN DER WAERDEN, B. L., Moderne Algebra, 1. Teil. 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1950, S. 186.
- [11] RUDENBERG, H. G. und KENNEDY, F., 200 Mc/s traveling-wave chain amplifier. Electronics **22** [1949], H. 12, 106–109.
- [12] RATHEISER, L., Rundfunkröhren, Eigenschaften und Anwendung. Neubearbeitete Ausgabe, Regelen's Verlag, Berlin-Grunewald/Hannover 1949, S. 134.

Piezoelektrische Erregung von dickenschwingenden Quarzoszillatoren mittels eines Parallelfeldes*

Von RUDOLF BECHMANN

U.S. Army Signal Research and Development Laboratory, Fort Monmouth, N.J., U.S.A.

(A.E.Ü. 14 [1960], 361—365; eingegangen am 3. Juni 1960)

DK 621.373.5

AT- und BT-Quarzoszillatoren werden gewöhnlich mittels zweier Elektroden, die parallel zur Plattenoberfläche angeordnet sind, angeregt. Diese Erregung wird als Anregung mittels eines senkrechten elektrischen Feldes bezeichnet.

AT- und BT-Quarzoszillatoren können auch mittels zweier Elektrodenpaare parallel zur Plattenoberfläche angeregt werden, die einen Spalt begrenzen, in dem sich ein elektrisches Feld ausbildet. Diese Anregung wird als Parallelfelderregung bezeichnet. Zur Erregung der Dicken-Scherungsschwingung des AT- oder BT-Schnittes muß der Spalt parallel zur X-Achse angeordnet werden, d. h. das Feld parallel zur Z'-Achse verlaufen. Nicht nur die übliche Dicken-Scherungsschwingung mit dem Null-Temperaturkoeffizienten der Frequenz kann mittels eines Parallelfeldes angeregt werden, sondern auch die beiden anderen Dickenschwingungen, die zweite Scherungsschwingung und die Dehnungsschwingung. Zur Erregung dieser Schwingungen muß der Spalt parallel zur Z'-Achse verlaufen. Die Parallelfelderregung des AT-Schnittes bietet Vorteile bei der Anwendung für Quarzoszillatoren für hohe Präzision. Die Induktivität ist beträchtlich höher, und es ergeben sich höhere Werte der Güte Q .

Zwei Ausführungsbeispiele von Quarzoszillatoren der Frequenzen 750 kHz und 1 MHz für Parallelfelderregung werden betrachtet und die Daten des elektrischen Ersatzschaltbildes angegeben.

AT- and BT-quartz oscillators are usually excited by two electrodes parallel to the major surfaces of the plate. This is excitation by a perpendicular field.

AT- and BT-quartz oscillators can also be excited by two pairs of electrodes arranged so that each covers part of both major surfaces leaving a gap parallel to the major surface where an electric field is produced. This is excitation by a parallel field. To excite an AT- or BT-cut, the gap must be parallel to the X-axis, the field parallel to the Z'-axis. Not only the usual thickness-shear mode having a zero temperature coefficient of frequency can be excited by use of the parallel field excitation, but also the other two thickness modes, the second shear mode and the extensional mode. For excitation of these two modes the gap of the electrodes must be parallel to the Z'-axis. The parallel field excitation of AT-cuts is very advantageous for application to high precision quartz oscillators. Not only considerably higher values for the inductance are obtained but also higher values for Q .

Two examples of quartz oscillators for 750 kc/s and 1 Mc/s excited by a parallel field are considered and the data of the equivalent electric circuit are given.

1. Einleitung

In unendlich ausgedehnten Platten aus piezoelektrischem Material lassen sich im allgemeinen drei Dickenschwingungen und ihre Oberschwingungen anregen. Dasselbe gilt für endliche Platten, wenn Kopplungen zwischen Dicken-Scherungsschwingungen und Biegungsschwingungen und Kopplungen zwischen Dickenschwingungen und Längsschwingungen vernachlässigt werden. In einer Platte mit der Normalenrichtung z' z. B. sind diese drei Dicken-schwingungen durch die Deformationskomponenten z_x', z_y', z_z' , gegeben und durch zwei Scherungsschwingungen und eine Dehnungsschwingung charakterisiert. Im allgemeinen sind die drei Dicken-schwingungen miteinander gekoppelt, die drei orthogonalen Verschiebungen sind Wurzeln einer Säkulargleichung dritter Ordnung. Die piezoelektrische Anregung dieser drei Dickenschwingungen kann in zweifacher Weise erfolgen:

1. durch ein elektrisches Feld senkrecht zu Platte,
2. durch ein elektrisches Feld parallel zur Platte.

Bei der Parallelfelderregung hängt die Erregung von der Richtung des Feldes in der Platte ab und für jede Orientierung der Platte und jede der drei Schwingungsarten gibt es eine Richtung für optimale Erregung. Diese beiden Erregungsmöglichkeiten bestehen auch für die verschiedenen Längsschwingungen von Platten. Beide Anregungsarten folgen aus dem für eine spezielle Plattenorientierung transformierten Schema der piezoelektrischen Moduln.

Die Parallelfelderregung wendeten erstmals ATANASOFF und HART [1] zur dynamischen Bestimmung der Elastizitätsmoduln von Quarz an. Die sechs Elastizitätsmoduln von Quarz können unter Verwendung der drei Dickenschwingungen von vier verschiedenen orientierten Platten, z. B. der Orientierungen¹ xy , yx , (xyl) 45° , (yxl) $—51^\circ 47'$, ein Schnitt, der parallel zur Rhomboederfläche R verläuft, bestimmt werden, falls die durch ein senkrechtes Feld nicht erregbaren Schwingungen durch ein Parallelfeld angeregt werden.

Für einen asymmetrischen Kristall von triklinisch-hemiedrischer Symmetrie leitete der Verfasser [2]

* Auszug aus einem Vortrag, gehalten auf dem 14. Frequency Control Symposium, 31. Mai, 1. und 2. Juni 1960, Atlantic City, N.J., U.S.A.

¹ In dieser Darstellung sind die I.R.E.-Bezeichnungen für rotierte Platten verwendet; siehe Proc. Inst. Radio Engrs. 37 [1949], 1378—1395.

die Ausdrücke für die drei resultierenden piezoelektrischen Moduln unter der Annahme ab, daß die Feldrichtung einen beliebigen Winkel mit der Fortpflanzungsrichtung, d. h. mit der Plattenormale bildet, woraus mit der speziellen Annahme, daß die Feldrichtung in die Plattenebene fällt, die Ausdrücke für die Parallelfelderregung resultieren.

Anläßlich von Untersuchungen an Filterquarzen [3] ist die Frage aufgetaucht, ob die durch die unsymmetrischen Elektrodenzuführungen zusätzlich auftretende Parallelfelderregung eine mögliche Ursache für Mehrwelligkeiterscheinungen ist. Während sich hinsichtlich der Mehrwelligkeit ein negativer Befund ergab, zeitigte die Parallelfelderregung für Quarzoszillatoren des AT-Typs insbesondere für hohe Frequenzkonstanz wesentliche Vorteile gegenüber der üblichen Erregung durch ein Feld senkrecht zur Platte [4]. Die Werte der Induktivität des elektrischen Ersatzschaltbildes sind erheblich größer und höhere Werte der Güte Q werden erzielt. Da bei der Parallelfelderregung die Elektroden so angeordnet werden können, daß sie den Bereich größter Schwingungsamplitude freilassen, ist auch die Alterung von metallisierten Kristallen, soweit sie durch die Elektroden bedingt ist, geringer. Bei einer Anordnung der Elektroden in einem Abstand von der Platte besteht hinsichtlich der Alterung zwischen beiden Erregungsarten kein Unterschied.

2. Prinzip der Parallelfelderregung

Das durch die kristallographischen Achsen bestimmte Hauptkoordinatensystem, das zur Beschreibung der Eigenschaften von Quarz verwendet wird,

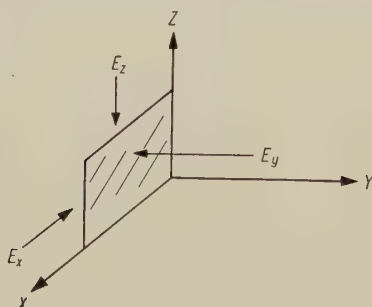


Bild 1. Hauptkoordinatensystem von Quarz mit Y-Platte.

Deformationskomponenten		S_1 x_x	S_2 y_y	S_3 z_z	S_4 y_z	S_5 z_x	S_6 x_y
Dickenschwingungen			Dehn.		Scher. II		Scher. I
Spannungskomponenten	$T_1 \ x_x$	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	0	0
	$T_2 \ y_y$	c_{12}	c_{11}	c_{13}	$-c_{14}$	0	0
	$T_3 \ z_z$	c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
	$T_4 \ y_z$	c_{14}	$-c_{14}$	0	c_{44}	0	0
	$T_5 \ z_x$	0	0	0	0	c_{44}	c_{14}
	$T_6 \ x_y$	0	0	0	0	c_{14}	c_{66}

Bild 2. Schema der Elastizitätsmoduln von Quarz, bezogen auf das Hauptachsensystem.

ist in Bild 1 veranschaulicht, außerdem ist eine Platte des Schnittes (yx) (Y-Platte) eingezeichnet. Das Schema der Elastizitätsmoduln von Quarz bezüglich des Hauptkoordinatensystems ist in Bild 2 angegeben. Dieses Schema verknüpft die Komponenten des elastischen Deformationstensors S_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, 6$) mit den Komponenten des elastischen Spannungstensors T_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, 6$). Die Elastizitätsmoduln $c_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, \dots, 6$), die die drei Dickenschwingungen der unendlich großen Platte (yx) bestimmen, sind durch die unschraffierten Felder von Bild 2 gekennzeichnet. In der Platte (yx) treten zwei durch y_x (S_6) und y_z (S_4) bestimmte Dicken-Scherungsschwingungen und eine durch y_y (S_2) gegebene Dicken-Dehnungsschwingung auf. Die Scherungsschwingung y_x , im folgenden als Scherungsschwingung I bezeichnet, ist ungekoppelt, während die durch y_y und y_z bestimmten Schwingungen, im folgenden als Dehnungsschwingung und Scherungsschwingung II bezeichnet, durch den Elastizitätsmodul c_{14} miteinander gekoppelt sind.

Das auf die Hauptachsen bezogene Schema der piezoelektrischen Moduln $e_{m\lambda}$ ($m = 1, 2, 3$; $\lambda = 1, 2, \dots, 6$), das die Komponenten des elastischen Deformationstensors S_λ mit den Komponenten des elektrischen Verschiebungsvektors D_m ($m = 1, 2, 3$) verknüpft, zeigt Bild 3. Dieses Schema bestimmt die

Deformationskomponenten	S_1 x_x	S_2 y_y	S_3 z_z	S_4 y_z	S_5 z_x	S_6 x_y	Erregung der Dicken-schwingungen Platte yx Feld
Dickenschwingungen		Dehn.		Scher. II		Scher. I	
elektrische Verschiebungs-komponenten	D_x	e_{11}	$-e_{11}$	0	e_{14}	0	II
	D_y	0	0	0	$-e_{14}$	$-e_{11}$	I
	D_z	0	0	0	0	0	II

Bild 3. Schema der piezoelektrischen Moduln von Quarz, bezogen auf das Hauptachsensystem.

piezoelektrische Anregung der verschiedenen Schwingungsarten, und zwar verweisen die unschraffierten Spalten auf die Dickenschwingungen, die schraffierten Spalten auf die Anregung der Längsschwingungen der Platte (yx) . Aus Bild 3 folgt, daß durch ein elektrisches Feld in der Y-Richtung nur die Scherungsschwingung I, und zwar mittels des piezoelektrischen Moduls e_{11} , angeregt werden kann, während die Scherungsschwingung II und die Dehnungsschwingung mittels der piezoelektrischen Moduln e_{11} bzw. e_{14} durch ein Feld in der X-Richtung angeregt werden können. Diese Anregung, bei der das erregende Feld parallel zur Platte verläuft, wird als Parallelfelderregung bezeichnet.

Betrachten wir eine Platte der Orientierung $(yxl)\theta$, d. h. eine mit dem Winkel θ um die X-Achse gedrehten Platte, so erhält man für $\theta = 35^\circ$ den AT-Schnitt, für $\theta = -49^\circ$ den BT-Schnitt, Orientierungen, bei denen der Temperaturkoeffizient der Frequenz das Vorzeichen wechselt. Das Schema der Elastizitätsmoduln in Bild 2 bleibt dabei ungeändert, lediglich die Werte der Elastizitätsmoduln sind Funktionen des Orientierungswinkels θ . Das Schema

Deformationskomponenten	S_1 $x_{x'}$	S_2 $y_{y'}$	S_3 $z_{z'}$	S_4 $y_{z'}$	S_5 $z_{x'}$	S_6 $x_{y'}$	Erregung der Dicken-schwingungen Platte $(yxl)\theta$ Feld
Dickenschwingungen		Dehn.		Scher. II		Scher. I	
elektrische Verschiebungs-komponenten	D_x	e_{11}	e'_{12}	e_{13}	e'_{14}	0	II
	$D_{y'}$	0	0	0	e'_{25}	e'_{26}	\perp
	$D_{z'}$	0	0	0	e'_{35}	e'_{36}	II

Bild 4. Schema der piezoelektrischen Moduln für die Orientierung $(yxl)\theta$.

der piezoelektrischen Moduln für die Orientierung $(yxl)\theta$ zeigt Bild 4. Die Werte der piezoelektrischen Moduln sind ebenfalls Funktionen der Orientierung θ und sind durch Striche gekennzeichnet, die piezoelektrischen Moduln $e'_{13}, e'_{35}, e'_{36}$, die für die Y-Platte, d. h. für $\theta = 0$ Null sind, werden für $\theta \neq 0$ endlich. Die Scherungsschwingung I einer Platte der Orientierung $(yxl)\theta$, z. B. der AT- oder BT-Schnitt, lassen sich somit in zweifacher Weise piezoelektrisch anregen, in der üblichen Weise durch ein Feld senkrecht zur Platte mittels e'_{26} und durch ein Feld parallel zur Z' -Richtung in der Plattenebene mittels e'_{36} .

Die Ausdrücke für die piezoelektrischen Moduln der drei Dickenschwingungen einer Platte der Orientierung $(yxl)\theta$ sind im folgenden zusammengestellt². E_{\perp} bedeutet eine Feldrichtung normal, E_{\parallel} eine Feldrichtung parallel zur Platte, wobei der Winkel Φ , der die Feldrichtung in der Plattenebene beschreibt, von der X-Achse aus gezählt ist.

Scherungsschwingung I, $x_{y'}$

$$\begin{aligned} E_{\perp}: \quad e'_{26} &= e_{11} \cos^2 \theta + e_{14} \cos \theta \sin \theta, \\ E_{\parallel}: \quad e'_{36} \Phi &= (e_{11} \cos \theta \sin \theta + e_{14} \sin^2 \theta) \sin \Phi. \end{aligned}$$

Da die Scherungsschwingung II und die Dehnungsschwingung miteinander gekoppelt sind, erhält man an Stelle von $e'_{12} \Phi$ und $e'_{14} \Phi$ die resultierenden piezoelektrischen Moduln $[e'_{12} \Phi]$ und $[e'_{14} \Phi]$, die zwei Konstanten p_i und q_i enthalten, deren Werte aus der oben erwähnten Säkulargleichung für die Dickenschwingung folgen [5].

Dehnungsschwingung, $y_{y'}$;
Scherungsschwingung II, $y_{z'}$

$$\begin{aligned} E_{\perp}: \quad e'_{22} &= 0, \quad e'_{24} = 0, \\ E_{\parallel}: \quad \begin{Bmatrix} [e'_{12} \Phi] \\ [e'_{14} \Phi] \end{Bmatrix} &= [q_i (e_{11} \cos \theta - e_{14} \sin \theta) - r_i e_{14} \cos \theta] \cos \Phi; \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

Für die Platte der Orientierung $(yxl) 35^\circ 15'$ wird:

$$\begin{aligned} [e'_{12} \Phi]: \quad q_2 &= 0,7811, \quad r_2 = 0,6244, \\ [e'_{14} \Phi]: \quad q_3 &= 0,6244, \quad r_3 = -0,7811. \end{aligned}$$

Im Fall verschwindender Kopplung, d. h. für $e'_{14} = 0$, ist

$$\begin{aligned} q_2 &= -r_3 = \cos \theta, \\ q_3 &= r_2 = \sin \theta \end{aligned}$$

² Diese Beziehungen wurden bereits in [3] abgeleitet. Die Ausdrücke für die Parallelfelderregung der Scherungsschwingung II und der Dehnungsschwingung sind in [3] versehentlich unvollständig angegeben und seien hiermit berichtigt.

und damit gehen die obigen resultierenden piezoelektrischen Moduln in die entsprechenden üblichen transformierten piezoelektrischen Moduln

$$\begin{aligned} e'_{12} \Phi &= [e_{11} \cos^2 \theta - 2 e_{14} \cos \theta \sin \theta] \cos \Phi, \\ e'_{14} \Phi &= [e_{11} \cos \theta \sin \theta + e_{14} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \cos \Phi \end{aligned}$$

über.

3. Elektrodenanordnung für die Parallelfeldanregung

Die Anordnung der Elektroden zur piezoelektrischen Erregung von Dickenschwingungen mittels eines Feldes senkrecht zur Platte zeigt schematisch Bild 5. Zu beiden Seiten der Platte wird je eine Elek-

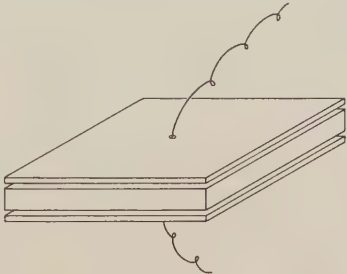


Bild 5. Elektrodenanordnung zur piezoelektrischen Erregung durch ein Feld senkrecht zur Platte.

trode parallel zur Oberfläche angeordnet. Zur Erregung der Platte mittels eines Parallelfeldes benötigt man vier Elektroden parallel zur den Plattenoberflächen, die zu zwei Paaren zusammengefaßt werden können und die einen Spalt g begrenzen, in dem sich das elektrische Feld ausbildet. Die Elektrodenanordnung für die Parallelfeldanregung zeigt schematisch Bild 6. Die maximale Anregung der

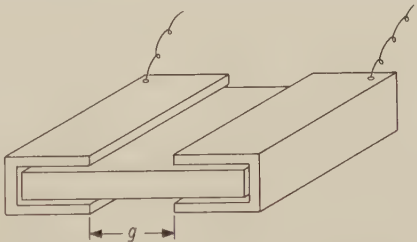


Bild 6. Elektrodenanordnung zur piezoelektrischen Erregung durch ein Feld parallel zur Platte.

Scherungsschwingung I einer Platte der Orientierung $(yxl)\theta$ erhält man für $\theta = 90^\circ$, d. h. das elektrische Feld muß parallel zur Z' -Achse, der Spalt parallel zur X -Achse verlaufen.

4. Parallelfelderregte AT-Quarzoszillatoren

Eines der ersten Versuchsmodelle eines AT-Quarzoszillators für die Frequenz 750 kHz, der mittels eines Parallelfeldes erregt wurde, zeigt Bild 7. Die Platte besitzt einen Durchmesser von 21 mm und ist am Rand facettiert. Die Daten des elektrischen Ersatzschaltbildes hängen von der Spaltbreite ab. Die Induktivität L_1 des Ersatzschaltbildes ist als Funktion der Spaltbreite g in Bild 8 dargestellt.



Bild 7. Versuchsmodell eines AT-Quarzoszillators für 750 kHz mit Parallelfelderregung.

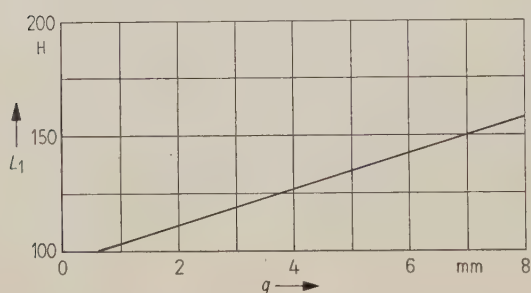


Bild 8. Induktivität L_1 als Funktion der Spaltbreite g für einen parallelfelderregten Quarz für 750 kHz.

Ein Beispiel eines AT-Quarzoszillators mittels Parallelfelderregung für die Frequenz 1000 kHz, der in einem evakuierten Glaskolben montiert ist, zeigt Bild 9³. Die Platte besitzt einen Durchmesser von 25 mm und ist als Linse ausgebildet. Die Platte hat die gleichen Abmessungen wie die des Präzisionsquarzes Type BG9A der Fa. Bliley. Die Daten des Versuchsquarzes mit Parallelfelderregung und vergleichsweise die Daten des Präzisionsquarzes BG9A sind in Tabelle I zusammengestellt [5]. Der Elektrodenspalt beim Versuchsquarz beträgt 1 mm. Die Induktivität ist beim Versuchsmodell etwa 50mal größer als bei dem üblichen Modell. Man erkennt aus Tabelle I, daß die Frequenz bei der Parallelfelderregung etwas höher ist, der Wert hängt von der Spaltbreite ab. Ferner sind in Tabelle I die Daten eines Präzisionsquarzes für 5 MHz, der in der fünften Oberschwingung angeregt ist, angegeben. Es handelt sich dabei um die Type BG61A-5 der Firma Bliley. Die Werte sind typisch. Die Vorteile

³ Dieses Muster wurde von der Fa. Bliley Electric Co., Erie, Pennsylvania, hergestellt.

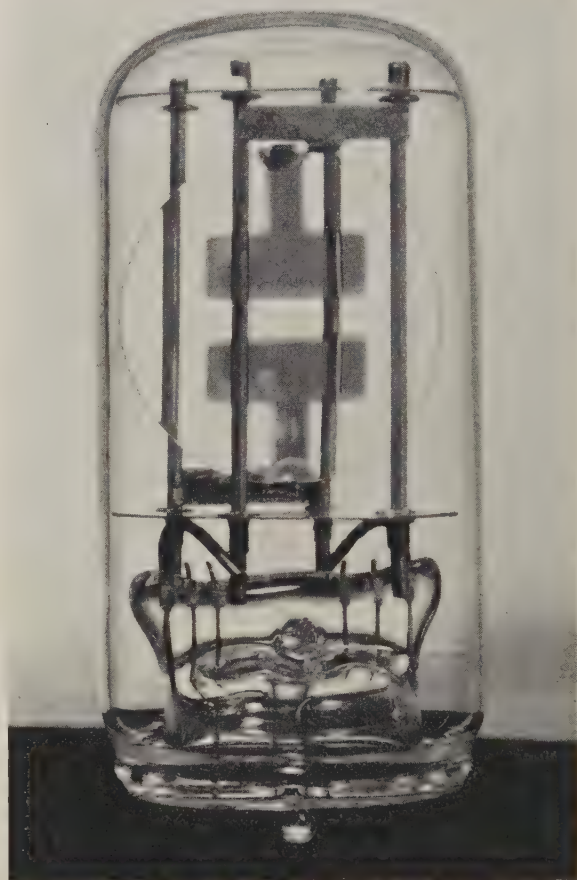


Bild 9. Modell eines Quarzoszillators für 1 MHz mit Parallelfelderregung in einem evakuierten Glaskolben.

der Parallelfelderregung für Quarzkristalle hoher Präzision sind aus dieser Zusammenstellung klar zu erkennen.

Die in Bild 9 gezeigte Elektrodenanordnung ist nicht als optimal zu betrachten. Eine wesentlich zweckmäßigere Elektrodenanordnung besteht aus zwei längs eines Durchmessers angeordneten Sektoren, die einen großen Abstand voneinander besitzen, wobei der größte Teil der Plattenoberflächen frei von Metallisierung ist. Der Vorteil einer solchen Elektrodenanordnung ist ein zweifacher. Erstens ist das Zentrum der Platte, d. h. der Bereich größter Schwingungsamplitude, frei von Metallisierung, wodurch sich Alterungserscheinungen, die durch die Metallisierung verursacht werden, verringern. Zweitens erhält man eine Erhöhung der Güte Q , da die Metallisierung des Plattenzentrums Q herabsetzt. Grundsätzlich ist der Wert von Q von der Elektrodenanordnung unabhängig, vor allem, wenn die Elektroden einen Abstand von der Platte besitzen.

Von großem Einfluß auf die Güte des Oszillators ist die Geometrie und die Halterung der Platte. Kürzlich berichtete V. IANOUCHEVSKY [6] vom Observatorium Paris über linsenförmig ausgebildete Platten des AT-Schnittes (Frequenz 1 MHz, Durchmesser 26,8 mm), die besonders gehaltet waren und eine Güte von $10 \cdot 10^6$ und darüber hatten.

Tabelle I.

	<i>f</i>	<i>n</i>	<i>C</i> ₁	<i>L</i> ₁	<i>R</i> ₁	<i>C</i> ₀	<i>Q</i>
	kHz		10 ⁻⁴ pF	H	Ω	pF	· 10 ⁶
Erregung mittels eines parallelen Feldes Versuchsmodell	1000,381	1	3,35	75,5	180	3,3	2,6
Erregung mittels eines senkrechten Feldes Bliley BG 9 A	1000,000	1	177	1,43	5	12	1,8
Bliley BG 61 A-5	5000,000	5	1,15	8,8	125	4,5	2,2

Der Temperaturkoeffizient der Frequenz z. B. des AT-Schnittes hängt in geringem Maße von der Elektrodenanordnung ab. Der Nullwinkel des Temperaturkoeffizienten der Frequenz des AT-Schnittes verschiebt sich bei Parallelfeld-Elektrodenanordnung um einige Minuten in Richtung höherer Orientierungswinkel, d. h. ein parallelfeldangeregter AT-Schnitt verhält sich wie ein in einer Oberschwingung angeregter Kristall.

Wir stehen am Beginn der Entwicklung von parallelfelderregten Quarzoszillatoren. Die Frage der Halterung der Platten ist bei sehr hohem *Q* von besonderer Bedeutung, die zweckmäßigste Dimensionierung der Elektroden ist zu ermitteln. Wir

erwarten eine wesentliche Erhöhung der Frequenzkonstanz für Quarzoszillatoren für sehr hohe Stabilität.

Schrifttum

[1] ATANASOFF, J. V. und HART, P. J., Dynamical determination of the elastic constants and their temperature coefficients for quartz. Phys. Rev. **59** [1941], 85–96.
[2] BECHMANN, R., Über Dickenschwingungen piezoelektrischer Kristallplatten; Nachtrag. A.E.Ü. **7** [1953], 354–356.
[3] BECHMANN, R., Filterquarze im Bereich 7 bis 30 MHz. A.E.Ü. **13** [1959], 90–93.
[4] BECHMANN, R., Improved high-precision quartz oscillators using parallel field excitation. Proc. Inst. Radio Engrs. **48** [1960], 367–368 (Correspondence).
[5] BECHMANN, R., Excitation of piezoelectric plates by use of a parallel field with particular reference to thickness modes of quartz. Proc. Inst. Radio Engrs. **48** [1960], 1278–1280.
[6] IANOUCHEVSKY, V., persönliche Mitteilung.

BUCHBESPRECHUNGEN

H. Schönfeld, Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik, 3. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1960, XI, 319 Seiten, 298 Bilder, 16 cm × 24 cm, Ganzleinen DM 27,-.

Die dritte, posthume Auflage des Buches wurde von J. FISCHER geleitet, der im Sinne des Autors Aufbau und Umfang des Werkes im wesentlichen beibehielt. Auch wurden einige Fachausdrücke ungeändert übernommen, die heute z. T. überholt erscheinen, um die lebendige plastische Darstellung der Darlegungen nicht zu zerstören, die sich von diesen Bezeichnungen ableiten. Eine Ausnahme wurde nur bei der Bezeichnung und Definition der international festgesetzten Einheiten und Normen gemacht, die auf die heute gültige Formulierung gebracht wurden.

Das Buch macht den Studierenden aller Zweige der modernen Elektrotechnik mit den grundlegenden Gegebenheiten und physikalischen Gesetzen bekannt, auf welchen sein Wissensgebiet basiert und aus welchen sich die technischen Anwendungen entwickelten. Der Stoff wird in „Elektrische Erscheinungen in Leitern“, „Elektrische Erscheinungen in Nichtleitern“ und „Elektromagnetische Erscheinungen“ gegliedert; in einem abschließenden Kapitel werden die Gesetze zusammengefaßt, welche spezifisch für Wechselstrom Bedeutung besitzen. In jedem der großen Abschnitte wird von allgemein bekannten Begriffen ausgegangen, diese verallgemeinert, an Hand zahlreicher schematischer Darstellungen das spezifische Verhalten besprochen und die Gesetzmäßigkeiten abgeleitet. Typische Beispiele zur technischen Anwendung und Verwertung dieser Gesetzmäßigkeiten werden gebracht. Die Ausführungen im vorgehenden Abschnitt bilden die Voraussetzungen für die Darlegungen des folgenden Abschnitts. So geben z. B. die Charakteristika der Leiter und Nichtleiter im elektrischen und magnetischen Feld die Grundlagen, um den Studenten in logisch geschlossener klarer Didaktik in das Gebiet der Verknüpfung elektrischer und magnetischer Erscheinungen und in die weitgehenden Analogien und ambivalenten Gesetze einzuführen.

Diese klar durchdachte geschlossene Systematik erschließt dem Studierenden grundlegende Kenntnisse seines Sachgebietes und befähigt ihn zur kritischen Stellungnahme der weiteren Entwicklung sowie zur selbständigen Lösung neuer Probleme. Das Werk stellt daher eine ausgezeichnete Vorbereitung für jedes ernste Fachstudium dar und sollte daher bei Studenten der frühen Semester allgemein Verbreitung finden. J. PIESCH

E. Heyn, Elektromagnetische Felder in gekrümmten Hohlleitern (Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften, Klasse für Mathematik, Physik und Technik, Jahrgang 1958, Nr. 4). Akademie-Verlag, Berlin 1958, 41 Seiten, 11 Bilder, DIN A 4, kartoniert DM 8,70.

Der vorliegende Beitrag zur Hohlleitertheorie behandelt die Wellenausbreitung in Hohlleitern mit beliebigem festem, auch mehrfach zusammenhängendem Querschnitt, konstanter Krümmung und einheitlichem Füllmaterial. Die Darstellung des Querschnittes durch die Feldtypen des geraden Hohlleiters und die Herleitung der Telegraphengleichungen für ihre Amplituden entspricht ähnlichen Entwicklungen bei SCHELKUNOFF, MORGAN u. a. Der Hauptteil der Arbeit ist der Bestimmung der Streumatrix beim Einsatz eines solchen Krümmers zwischen zwei gerade Hohlleiter gewidmet, insbesondere für gewöhnliche Kabel und echte Hohlleiter, in denen nur die Grundwelle ausbreitungsfähig ist. Als Beispiel wird die Reflexion an einem *H*-Krümmer eines rechteckigen Hohlleiters numerisch durchgerechnet und in Kurven dargestellt. Zum Schluß findet sich eine Anwendung auf die Resonanzfrequenzen eines gebogenen Koaxialhohlraumes.

In den Entwicklungen werden die meisten Schritte explizit durchgeführt. Dies bewirkt zwar eine ziemliche Häufung von Formeln, erleichtert aber die Lektüre erheblich. Sie kann den daran Interessierten als unschwierig und anregend empfohlen werden. K. SCHNETZLER

H. Kaufmann, Dynamische Vorgänge in linearen Systemen der Nachrichten- und Regelungstechnik. R. Oldenbourg Verlag, München 1959, 211 Seiten, 105 Bilder, 16 cm \times 24 cm, Ganzleinen DM 26,50.

Das vorliegende Buch stellt eine Neuerscheinung auf dem Gebiet der Berechnung von Regelungsvorgängen dar. Es behandelt die Parallelität zwischen Frequenzabhängigkeit und Zeitabhängigkeit von dynamischen Vorgängen in linearen Netzwerken. Vor allem wird besonderer Wert auf Näherungsverfahren gelegt, die der Netzwerksynthese sehr dienlich sind. Der Übertragungsfunktion $G(s)$ eines Netzwerkes wird die Gewichtsfunktion $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ gegenübergestellt. Der Parameter $s = \sigma + j\omega$ liefert für $\sigma \rightarrow 0$ den Frequenzgang $G(j\omega) = e^{-a-jb}$ mit $a(\omega) = \text{Dämpfung}$ und $b(\omega) = \text{Phase}$. Diesen Beziehungen sind Kapitel 2 „Gewichtsfunktion und Frequenzgang als Kennzeichnungen der Netzwerkeigenschaften“, Kapitel 3 „Übertragungsfunktion $G(s)$ und Berechnung der Gewichtsfunktion $g(t)$ “ und Kapitel 4 „Der Frequenzgang $G(j\omega)$ “ gewidmet. Im 5. Kapitel werden die bekannten Stabilitätskriterien behandelt. Kapitel 6 beschäftigt sich speziell mit den Approximationsverfahren für die Analyse und Synthese von Netzwerken. Besonders soll die Methode der Pol-Ortskurven erwähnt werden, die sich für die Berechnung von Regelsystemen bewährt hat, da man das System sowohl hinsichtlich des Frequenzverhaltens als auch des Zeitverhaltens beschreiben kann. Das folgende Kapitel enthält Betrachtungen über Kennwerte wie Überspringen, Laufzeit, Übergangs- oder Anstiegszeit, Bandbreite, Regelabweichung. Das letzte Kapitel behandelt Systeme mit Abtastung.

Der Stoff ist gut abgehandelt, die Behandlung der Parallelität von Zeit- und Frequenzverhalten ist sehr zu begrüßen. Der praktische Teil kommt allerdings zu kurz. Die im Anhang 3 gebrachte Tabelle der Laplace-Transformierten enthält nur einige Rechenregeln, der wichtige Faltungssatz fehlt leider vollständig, die aufgeführten Korrespondenzen

dürften kaum ausreichen. Anhang 1 enthält Tafeln für $\frac{\sin x}{x}$ und $\frac{\cos x}{x}$, Anhang 2 tabellierte Werte für die Laguerre-

Funktionen. Das Buch ist für fortgeschrittene Diplom-Ingenieure der Nachrichten- und Regelungstechnik, die über mehrere Jahre Industriepraxis verfügen, geeignet.

V. FETZER

L. A. Mejerowitsch und L. G. Selitschenko, Impulstechnik. (Aus dem Russischen übersetzt von W. GLASER und W. ROHDE.) Berliner Union, Stuttgart, und Verlag Technik, Berlin 1960, 680 Seiten, 701 Bilder, 17,5 cm \times 24,5 cm, Ganzleinen DM 74,-.

Dieses aus dem Russischen ins Deutsche übersetzte Lehrbuch gibt in didaktisch geschickter Weise einen Überblick über die theoretischen und praktischen Grundlagen der Impulstechnik. Ausführlich behandelt werden die allgemeinen Methoden der Schwingungsanalyse sowie die Wirkungsweise und die Dimensionierung der wichtigsten Schaltungen und deren Anwendungsmöglichkeiten. Die dargebotenen ausführlichen Berechnungsbeispiele zielen weniger auf die

Mitteilung dimensionierter Standardschaltungen, sondern dienen vor allem dazu, den Lesern Hinweise zu geben, wie sie ein vorliegendes Problem zweckmäßig lösen können. Dabei werden auch Fragen der Stabilität erörtert, Fehlerbetrachtungen durchgeführt und Meßverfahren angegeben. Um den Umfang nicht weiter zu steigern, beschränkten sich die Verfasser auf die Beschreibung von Schaltungen mit Elektronenröhren; Transistorschaltungen werden nicht behandelt. Bei den in den angegebenen Schaltungen verwendeten Röhren handelt es sich meist um veraltete Typen. Dies dürfte aber insofern kein allzu großer Nachteil sein, da der Praktiker die für seinen Zweck geeignetsten Typen sowieso an Hand von Datenblättern selbst auswählt. Die russischen Literaturzitate der Originalaufgabe wurden von den Übersetzern zum Teil durch entsprechende deutsch- und englischsprachige Quellenangaben ersetzt, die bei uns leichter erreichbar und auswertbar sind. Ansonsten wurden bei der Übersetzung die deutschen Normen weitgehend berücksichtigt.

Da es in deutscher Sprache bisher kein derart ausführliches Werk gab und die einzelnen Gebiete in Fachzeitschriften weit verstreut behandelt sind, dürfte dieses Buch bei Ingenieuren und Studierenden als wertvolle Arbeitsgrundlage aufgenommen werden und ihnen ein vertieftes, systematisches Einarbeiten in die Impulstechnik ermöglichen.

S. W. WAGNER

H. G. Garnir, Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction à leur étude générale. Birkhäuser Verlag, Basel/Stuttgart 1958, 234 Seiten, zahlr. Bilder, 17 cm \times 24,5 cm, Ganzleinen DM 29,-.

Bei diesem Buch handelt es sich um eine ausgearbeitete Vorlesung, die in den Jahren 1954 bis 1955 und 1955 bis 1956 an der Universität Lüttich gehalten worden ist. Die Vorlesung behandelt das Dirichlet-Neumannsche Problem für den Wellenoperator

$$a \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} + c - \Delta; \quad \Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (a, b, c \text{ reell})$$

und für den entarteten Operator der Wärmeleitung

$$b \frac{\partial}{\partial t} + c - \Delta; \quad (b, c \text{ reell}, b > 0),$$

also für die Operatoren, die bei der Ausbreitung von Wellen oder anderen Störungen in einem Kontinuum maßgebend sind.

Das Ziel, das sich der Verfasser setzt, systematisch Ergebnisse zusammenzustellen und in das Studium der Grenzprobleme einzuführen, die sich bei linearen Operatoren mit partiellen Ableitungen ergeben, kann als erreicht angesehen werden. Da das Buch nur die Kenntnis der Funktionen reeller Veränderlicher, also Integralrechnung, Fourier- und Laplace-Transformationen, und die Elemente der Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher voraussetzt, kann es auch Studierenden und Ingenieuren empfohlen werden, die etwas tiefer in dieses Stoffgebiet eindringen wollen.

A. THOMA

Mitarbeiter dieses Heftes:

Dr. R. Bechmann, 16 Fairfield Ave., Oceanport, N.J., U.S.A.; Dr. K. Bibl, im Ionosphären-Institut, Breisach (Rhein); Prof. Dr. G. Doetsch, Freiburg i. Br., Riedbergstraße 8 (Günterstal); Dr. V. Fetzer, Stuttgart-13, Lembergstraße 20; Dr. J. Koch, Hamburg 33, Wasmannstraße 9; Dr. K. Schmetzler, i. H. Siemens & Halske AG, Zentral-Laboratorium, München 25, Hofmannstraße 51; Dr. W. Schüssler, im Institut für Elektrische Nachrichtentechnik der Technischen Hochschule, Aachen, Templergraben 55; Dipl.-Ing. S. W. Wagner, Karlsruhe, Holderweg 6. Alle Rechte, auch die der photomechanischen Wiedergabe, sind vorbehalten, jedoch wird gewerblichen Unternehmen die Anfertigung einer photomechanischen Vervielfältigung (Photokopie, Mikrokopie) von Beiträgen oder Beitragsteilen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens gegen Bezahlung der dort vorgesehenen Gebühren an die Inkassostelle für Photokopiergebühren beim Börsenverein des Deutschen Buchhandels, Frankfurt am Main, gestattet. Werden die Gebühren durch Wertmarken der Inkassostelle entrichtet, so ist für jedes Photokopierblatt eine Marke im Betrag von —,30 DM zu verwenden.

© 1960 S. Hirzel Verlag Stuttgart. Printed in Germany. Satz und Druck: K. Triltsch, Graphischer Großbetrieb, Würzburg.

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Schriftleitung:

Dr. phil. J. Piesch,

Wien IV/50, Karlsplatz 13, Fernruf U 46530

Dr.-Ing. J. Schunack,

Berlin-Lichterfelde 1, Drakestraße 1a, Fernruf 732261

Prof. Dr.-Ing. E. h. Dr. techn. M. Strutt,

Zürich 7, Gloriosastraße 35, Fernruf 327330

Oberstudiendirektor Dr. phil. A. Thoma,

Fulda, Heinrich-von-Bibra-Platz 1,

Fernruf (vorm.) 2962, (nachm.) 4428

Geschäftsführende Redaktion und Anzeigenverwaltung:

Ing. Friedrich Rühmann

(17a) Karlsruhe-Durlach, Machstraße 4, Fernruf 42854

Alle Zuschriften werden entweder an die Schriftleitung oder an die Geschäftsführende Redaktion erbeten.

Geschäftliche Hinweise:

Der Bezug des Archivs der elektrischen Übertragung durch Verlag, Post und Buchhandel ist im Abonnement zum Preis von DM 20,— für das Vierteljahr möglich. Einzelhefte können zum Preis von DM 7,— geliefert werden. Anzeigenaufträge und -anfragen bitten wir an die Anzeigenverwaltung der Zeitschrift zu richten.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

Postscheckkonto Stuttgart 64383

LAUFFELDRÖHREN

Von Prof. Dr. W. Kleen
und Dr. K. Pöschl

X, 192 Seiten mit 127 Bildern
16 cm × 23 cm, Ganzleinen DM 28,—

Teil 2 der

EINFÜHRUNG IN DIE MIKROWELLEN-ELEKTRONIK

Von Prof. Dr. Werner Kleen

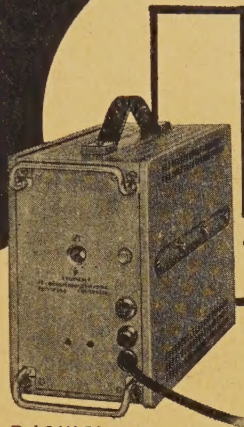
Inhaltsübersicht

- A. Wanderfeldröhre
 - 1. Qualitative Übersicht
 - 2. Lineare Vorgänge
 - 3. Rauschen
 - 4. Nichtlineare Vorgänge
 - 5. Bemessung, Daten und Anwendungen von Wanderfeldröhren
 - B. Sonstige Lauffeldröhren
 - 6. Rückwärtswellenröhre
 - 7. Elektronenwellenröhre
 - 8. Lauffeldröhre mit Widerstandsschicht
 - 9. Spezielle Formen von Lauffeldröhren und verwandte Effekte
- Anhänge

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART



SIEMENS
WEITVERKEHRS
TECHNIK



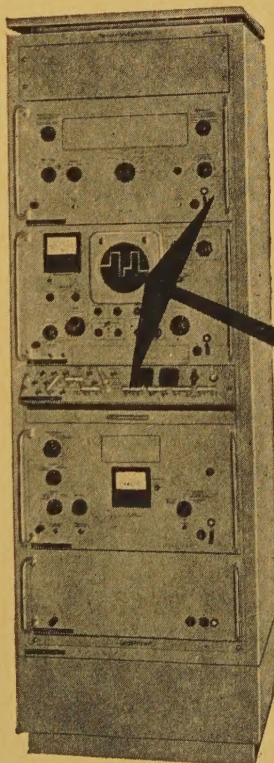
Rel 3 W 64

1/2 %

**Schneller und
genauer messen
auch in der
Fernsehtechnik**

Der universelle Meßempfänger ist der
Kontrolloszillograph Rel 3 U 127 f.

Er mißt die vom Prüfsignalgeber Rel 3 W 419 d
und Meßmischer Rel 3 W 420 d
abgegebenen CCI-Prüfsignale, Rechteck- oder
Treppensignale und ihre Einzelkomponenten.



In Verbindung mit dem
Video-Pegelsender
Rel 3 W 219 oder dem
leichten tragbaren
Video-Wobbelsender
Rel 3 W 710 können
Frequenzgangkurven von
Übertragungsleitungen
oder Verstärkern
dargestellt werden.

Der kleine, handliche
Fernseh-Normalsignal-
geber Rel 3 W 64
liefert eine hochkon-
stante Rechteckspannung
mit Synchronisierimpuls
als Normbezugsspannung
und zu Eichzwecken.

W 129

SIEMENS & HALSKE AKTIENGESELLSCHAFT
WERNERWERK FÜR WEITVERKEHRS- UND KABELTECHNIK

